模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2026 年秋季

前情提要

- 超积与超幂（Łoś 定理、典范初等嵌入）
- 模态饱和模型具有 Hennessy-Milner 性质
- 超滤扩张 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M} = (Uf(W), R^{\mathfrak{ue}}, V^{\mathfrak{ue}})$ 与主超滤嵌入 $w \mapsto u_w$

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ 和任意 $u \in Uf(W)$ 有：

$$V(\varphi) \in u \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$$

因而，对任意 $w \in W$ 有 $w \leftrightsquigarrow u_w$

注意：$m_{\Diamond}(V(\psi)) = \{w \in W \mid \exists v \in V(\psi)\ Rwv\} = V(\Diamond\psi)$

超滤扩张

证明.

对 φ 作结构归纳（原子与布尔情形由 $V^{\mathfrak{ue}}$ 定义及超滤性质直接得）。考虑 $\varphi = \Diamond\psi$：

- ($\Leftarrow$) 若 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\psi$，则存在 $v \in Uf(W)$ 使 $R^{\mathfrak{ue}}uv$ ($\forall X \subset W\ (X \in v \to m_{\Diamond}(X) \in u)$) 且 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$。由归纳假设 $V(\psi) \in v$，故 $V(\Diamond\psi) = m_{\Diamond}(V(\psi)) \in u$。

超滤扩张

证明.

对 φ 作结构归纳（原子与布尔情形由 V^{ue} 定义及超滤性质直接得）。考虑 $\varphi = \Diamond\psi$：

- ($\Rightarrow$) 若 $V(\Diamond\psi) = m_{\Diamond}(V(\psi)) \in u$，令 $E = \{V(\psi)\} \cup \{X \subset W \mid m_{\Box}(X) \in u\}$。对任意 $m_{\Box}(X_1), \ldots, m_{\Box}(X_n) \in u$，有 $m_{\Box}(\bigcap_i X_i) = \bigcap_i m_{\Box}(X_i) \in u$，从而 $m_{\Diamond}(V(\psi)) \cap m_{\Box}(\bigcap_i X_i) \in u$ 非空，故 $V(\psi) \cap \bigcap_i X_i \neq \emptyset$。因此 E 具有穷交性质，可扩张为超滤 $v \supset E$，于是 $R^{\mathrm{ue}}uv$ 且 $u \mathrm{e} \mathfrak{M}, v \Vdash \psi$

超滤扩张

证明.

对 φ 作结构归纳（原子与布尔情形由 V^{ue} 定义及超滤性质直接得）。考虑 $\varphi = \Diamond\psi$：

- ($\Rightarrow$) 若 $V(\Diamond\psi) = m_\Diamond(V(\psi)) \in u$，令 $E = \{V(\psi)\} \cup \{X \subset W \mid m_\Box(X) \in u\}$。对任意 $m_\Box(X_1), \ldots, m_\Box(X_n) \in u$，有 $m_\Box(\bigcap_i X_i) = \bigcap_i m_\Box(X_i) \in u$，从而 $m_\Diamond(V(\psi)) \cap m_\Box(\bigcap_i X_i) \in u$ 非空，故 $V(\psi) \cap \bigcap_i X_i \neq \emptyset$。因此 E 具有穷交性质，可扩张为超滤 $v \supset E$，于是 $\forall X \subset W(m_\Box(X) \in u \to X \in v)$ 且 $ue\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 是模态饱和的

证明.

设 Σ 在 $R^{\mathfrak{ue}}[u]$ 中有穷可满足，令

$$E = \{V(\phi) \mid \phi \in \Sigma\} \cup \{X \subset W \mid m_{\Box}(X) \in u\}$$

对任意有穷子集 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ 与 $m_{\Box}(X_1), \ldots, m_{\Box}(X_n) \in u$，存在 $v_0 \in R^{\mathfrak{ue}}[u]$ 满足 Σ_0，从而 $V(\bigwedge \Sigma_0), X_1, \ldots, X_n \in v_0$，其交非空。故 E 具有穷交性质，扩张为超滤 $v \supset E$ 即得 $R^{\mathfrak{ue}}uv$ 且 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \Sigma$。

超滤扩张

推论

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及 w, w' 分别是其中的状态，则

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', u_{w'}$$

饱和模型

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{M}$。假设 A 是 $\mathfrak{M}$ 论域的一个子集

- 定义语言 $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a\}_{a \in A}$，即添加了 $|A|$ 那么多个新的常数符号。$\mathfrak{M}$ 到 $\mathcal{L}_A$ 的膨胀 $\mathfrak{M}_A$ 把每个 c_a 解释为 a
- 定义 $\mathcal{L}_A$ 公式集 $p(x)$（其中公式至多含有自由变元 x）是 $\mathfrak{M}$ 的一个 A 上的 1-型 （1-type），当且仅当 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中 有穷可实现 。即，对 $p(x)$ 每个有穷子集 $p_0(x)$ 存在 $\mathfrak{M}$ 论域中元素 b 有 $\mathfrak{M}_A \vDash p_0(b)$

饱和模型

事实

在前一页定义的假设下。一个至多含有 x 为自由变元的 $\mathcal{L}_A$ 公式集 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中 有穷可实现，当且仅当 $p(x) \cup \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}_A$ 是一致的

注意：如果 $p(x) \cup \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}_A$ 一致，那么对任意 $p(x)$ 的有穷部分 $\varphi_0(x)$，$\exists x \varphi_0(x) \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}_A$。

饱和模型

例

- 对每个模态逻辑公式 ϕ，$ST_x(\phi)$ 是一个只含有 x 为自由变元的一阶逻辑公式
- 考虑 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$，$w \in W$。假设模态逻辑公式集 Σ 在 $R[w]$ 上有穷可满足。则

$$\{Rwx\} \cup \{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Sigma\}$$

是一个 $\mathfrak{M}$ 的 $\{w\}$ 上的 1-型

饱和模型

定义

- 令 κ 是一个（有穷或无穷的）基数。$\mathfrak{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。我们称 $\mathfrak{M}$ 是 κ-饱和的 （κ-saturated），当且仅当对任意 $\mathfrak{M}$ 论域的子集 A 有 $|A| < \kappa$，任意 $\mathfrak{M}$ 的 A 上的 1-型 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中可实现，即存在 $\mathfrak{M}$ 中 b 有 $\mathfrak{M}_A \vDash p(b)$

显然，若 $\kappa < \lambda$，λ-饱和蕴含 κ-饱和。模态逻辑中主要关注 ω-饱和性 ，即所有只含有有穷参数的 1-型都可实现

饱和模型

例

- 有穷结构都是 ω-饱和的
- $(\mathbb{Q}, <)$ 是 ω-饱和的
- $(\mathbb{N}, <)$ 不是 ω-饱和的

饱和模型

定理

给定模态逻辑语言类型 τ。任何 ω-饱和的 τ-模型都是模态饱和的。因此，ω-饱和的 τ-模型类具有 Hennessy-Milner 性质

证明.

Σ 在 $R[w]$ 中有穷可满足 $\Leftrightarrow$ $ST_x[\Sigma] \cup Rwx$ 在 $\mathfrak{M}$ 中有穷可满足

$\Leftrightarrow$ $ST_x[\Sigma] \cup Rwx$ 在 $\mathfrak{M}$ 中可满足

$\Leftrightarrow$ Σ 在 $R[w]$ 中可满足

饱和模型

定义

我们称 I 上的超滤 U 是 可数不完全的 (countably incomplete)，当且仅当存在 $\langle X_n \rangle_{n<\omega}$ 使得，每个 $X_n \in U$ 但 $\bigcap_n X_n \notin U$

例

- 任何 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤都是可数不完全的：

  $\bigcap_n (\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \emptyset$

饱和模型

定理

令 $\mathcal{L}$ 是一个可数语言。I 是非空集合。对每个 $i \in I$，$\mathfrak{M}_i$ 是 $\mathcal{L}$-结构。U 是 I 上的一个可数不完全的超滤。那么超积 $\prod_U \mathfrak{M}_i$ 是 $\aleph_1$-饱和的

饱和模型

证明概要（1/2）

设 $|A| \le \omega$，$p(x)$ 为 $\mathfrak{M} = \prod_U \mathfrak{M}_i$ 在 A 上的 1-型。

- 因 $\mathcal{L}_A$ 可数，可枚举 $p(x) = \{\varphi_n(x) \mid n < \omega\}$；对每个 $a \in A$ 固定一个代表函数 f_a（使 $a = [f_a]_U$）。
- 由 U 可数不完全，可取递降列 $I = Y_0 \supset Y_1 \supset \dots$ 使每个 $Y_n \in U$ 且 $\bigcap_{n<\omega} Y_n = \emptyset$。
- 令 $\psi_n(x) = \bigwedge_{k \le n} \varphi_k(x)$。由 $p(x)$ 有穷可实现及 Łoś 定理，

$$Z_n = \{ i \in I \mid \mathfrak{M}_i \vDash \exists x\, \psi_n(x) \text{（以 } f_a(i) \text{ 解释 } c_a\text{）} \} \in U$$

令 $W_n = Y_n \cap Z_n \in U$，则 $W_0 \supset W_1 \supset \dots$ 且 $\bigcap_{n<\omega} W_n = \emptyset$。

证明概要（2/2）

- 构造 $g \in \prod_{i \in I} M_i$：
  - 若 $i \notin W_0$，任取 $g(i) \in M_i$；
  - 若 $i \in W_0$，因 $\bigcap_{n<\omega} W_n = \emptyset$，存在最大的 $n(i) < \omega$ 使 $i \in W_{n(i)}$。由 $i \in Z_{n(i)}$，选取 $g(i) \in M_i$ 使 $\mathfrak{M}_i \vDash \psi_{n(i)}(g(i))$。
- 验证 $[g]_U$ 实现 $p(x)$：对任意 $k < \omega$，当 $i \in W_k$ 时必有 $n(i) \geq k$，从而 $\mathfrak{M}_i \vDash \psi_{n(i)}(g(i))$ 蕴含 $\mathfrak{M}_i \vDash \varphi_k(g(i))$。
- 由于 $W_k \in U$，由 Łoś 定理即得 $\mathfrak{M}_A \vDash \varphi_k([g]_U)$。故 $[g]_U$ 实现 $p(x)$。

饱和模型

引理 (迂回引理)

给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 以及分别在其中的状态 w, v。下列命题等价

- $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{N}, v$
- $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{N}, u_v$
- 存在超幂 $\prod_U \mathfrak{M}$ 和 $\prod_U \mathfrak{N}$，使得 $\prod_U \mathfrak{M}, [c_w]_U \leftrightarrows \prod_U \mathfrak{N}, [c_v]_U$

饱和模型

引理 (迂回引理)

给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 以及分别在其中的状态 w, v。下列命题等价

- $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{N}, v$
- $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightarrows \mathfrak{ue}\mathfrak{N}, u_v$
- 存在 ω-饱和模型 $\mathfrak{M}^*, w^*$ 和 $\mathfrak{N}^*, v^*$ 以及初等嵌入 $f : \mathfrak{M}, w \preccurlyeq \mathfrak{M}^*, w^*$ 和 $g : \mathfrak{N}, v \preccurlyeq \mathfrak{N}^*, v^*$ 有，
  $\mathfrak{M}^*, w^* \leftrightarrows \mathfrak{N}^*, v^*$

习题

- 2.5.4, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.10

下期预告

- Van Benthem 刻画定理