

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2026 年秋季

前情提要

- 模态不变性
 - 不交并
 - 生成子模型
 - 满同态
- 互模拟与模态等价

互模拟

定义 (互模拟 (基本模态逻辑语言))

给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 。我们称一个非空的关系 $Z \subset W \times W'$ 是一个 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟 (bisimulation), 记作 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$, 当且仅当它满足:

对任意 $w \in W, w' \in W'$

- 如果 wZw' , 那么对任意 $p \in \Phi$, $w \in V(p)$ 当且仅当 $w' \in V'(p)$
- 对任意 $v \in W$, 如果 wZw' 且 Rwv , 那么存在 $v' \in W'$ 使得 vZv' 且 $R'w'v'$ (正向条件)

互模拟

定义 (互模拟 (基本模态逻辑语言))

给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 。我们称一个非空的关系 $Z \subset W \times W'$ 是一个 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟 (bisimulation), 记作 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$, 当且仅当它满足:

对任意 $w \in W, w' \in W'$

- 如果 wZw' , 那么对任意 $p \in \Phi$, $w \in V(p)$ 当且仅当 $w' \in V'(p)$
- 对任意 $v' \in W'$, 如果 wZw 且 $Rw'v'$, 那么存在 $v \in W$ 使得 vZv' 且 Rwv (反向条件)

互模拟

事实

给定模态逻辑语言类型 τ 以及 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 、 $\mathfrak{M}'$ 以及 $\mathfrak{M}_i$
($i \in I$)

- 对任意 $i \in I$, 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有 $\mathfrak{M}_i, w \sqsubseteq \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, (i, w)$
- 如果 $\mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}$, 那么对任意 $\mathfrak{M}'$ 中 w 有 $\mathfrak{M}', w' \sqsubseteq \mathfrak{M}, w$
- 如果 $h : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ 是满同态, 那么对任意 $\mathfrak{M}$ 中 w 有 $\mathfrak{M}, w \sqsubseteq \mathfrak{M}', h(w)$

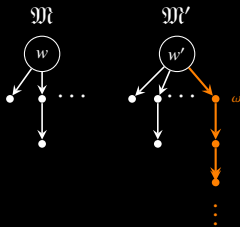
互模拟

互模拟似乎是最一般的保持模态不变性的概念，它是否能“完美”刻画模态公式的表达能力？即，是否有

$$\mathfrak{M}, w \sqsubseteq \mathfrak{M}', w' \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w' ?$$

互模拟

例 (模态等价但不互模拟)



模型构造: (命题赋值均为空)

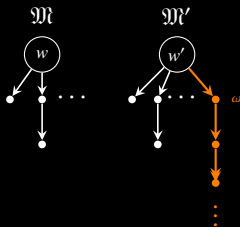
- $\mathfrak{M}$: 根 w 具有**所有有穷长**分支 (长 $1, 2, \dots$)
- $\mathfrak{M}'$: 在 $\mathfrak{M}$ 基础上增添一条**无穷长分支** (ω)

模态等价 ($w \rightsquigarrow w'$):

- 任取公式 ϕ , 设深度 $k = \text{deg}(\phi)$
- ϕ 仅能探测长至多为 k 的路径
- 两模型在深度 $\leq k$ 处结构完全相同, 故 $\mathfrak{M}, w \rightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$

互模拟

例 (模态等价但不互模拟)



已知: $w \leftrightarrow w'$ (单个公式均无法区分二者)。

但不互模拟 ($w \not\sim w'$):

- 反设存在互模拟 Z 使得 wZw'
- 在 $\mathfrak{M}'$ 中, 从 w' 沿无穷分支走一步到达 v_1
- 反向条件要求 w 存在后继 u 满足 uZv_1

互模拟

定义

给定模态语言类型 τ , 我们称 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 是 **相有穷的** (image-finite), 当且仅当对每个 $\mathfrak{M}$ 中 $n+1$ 元关系 R 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w , $\{(v_1, \dots, v_n) \mid R w v_1 \dots v_n\}$ 是有穷的。

定理 (Hennessy-Milner)

如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是两个相有穷的 τ -模型, 那么对任意 $w \in W$ 和 $w' \in W'$ 有

$$w \preceq w' \Leftrightarrow w \approx w'$$

互模拟

Hennessy-Milner 定理证明概要

只需证 ($\Leftarrow$): 模态等价关系 $\Leftarrow$ 本身是一个互模拟 (以基本语言为例)。设 $w \Leftarrow w'$

树展开

定义

- 我们称严格偏序 (W, R) 是树, 当且仅当对任意 $w \in W$, R 在 $\{v \in W \mid vRw\}$ 上是良序
- 考虑结构 $(W, R_i)_{i \in I}$, 其中每个 $i \in I$ 都是二元关系。我们称 $(W, R_i)_{i \in I}$ 是树形的 (tree-like), 当且仅当 (W, R) 是树, 其中 R 是 $\bigcup_i R_i$ 的传递闭包

树展开

事实

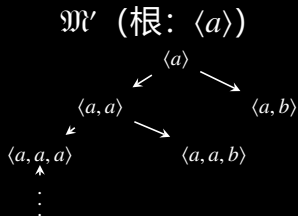
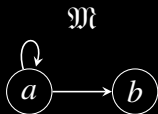
考虑模态逻辑语言类型 τ , 其中只含有一些一元模态词 $\{\Delta_i\}_{i \in I}$ 。 τ -模型 $\mathfrak{M} = (W, R_i, V)_{i \in I}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w , 存在一个点生成的树形的模型 $\mathfrak{M}'$ 以及 $\mathfrak{M}'$ 的根 w' 使得,

$$\mathfrak{M}, w \preceq \mathfrak{M}', w'$$

树展开

例

考虑基本模态语言模型: $W = \{a, b\}$, $R = \{(a, a), (a, b)\}$,
 $V(p) = \{b\}$ 。从 a 展开:



有穷模型性

给定模态逻辑语言类型 τ , 令 M 是一个 τ -模型类。

- 我们称 τ 对 M 而言有有穷模型性 (finite model property), 当且仅当对任意 τ -公式 ϕ , 如果 ϕ 在 M 中的某个模型上可满足, 那么 ϕ 在 M 中的某个有穷模型上可满足。
- 我们称 τ 有有穷模型性, 当且仅当 τ 对所有 τ -模型组成的类而言有有穷模型性

有穷模型性

有穷模型性意味着：

- 语言表达能力不足以迫使其模型是无穷的
- 往往会有可判定性

有穷模型性

定义 ((模态词的) 深度)

我们定义个模态逻辑公式的 **深度** (degree) 如下

$$\deg(p) = 0$$

$$\deg(\perp) = 0$$

$$\deg(\neg\phi) = \deg(\phi)$$

$$\deg(\phi \vee \psi) = \max\{\deg(\phi), \deg(\psi)\}$$

$$\deg(\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n)) = 1 + \max\{\deg(\phi_1), \dots, \deg(\phi_n)\}$$

特别地, $\deg(\Diamond\phi) = 1 + \deg(\phi)$

有穷模型性

事实

令 τ 是一个有穷的模态语言类型, 并且假设命题符号集 Φ 也是有穷的, 那么

- 对任意 n , 在模态逻辑等价意义上, 只有有穷多个深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式
- 对任意 n , 任意 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w , 在 w 上满足的所有深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式集命题逻辑地等价于一个公式

有穷模型性

注意: 模态逻辑语言下的命题逻辑需要添加 “等价替换规则”: 如果 $\varphi \vdash_{\text{PL}} \psi$, 那么 $\Diamond\varphi \vdash_{\text{PL}} \Diamond\psi$ (基本模态逻辑语言)
证明.

有穷模型性

定义 (n -互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的 w 和 w' 。对 $n \in \mathbb{N}$, 称 w 与 w' 是 n -互模拟的, 记作 $w \sqsubseteq_n w'$, 当且仅当存在一个二元关系序列 $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$ 满足:

- $wZ_n w'$
- 如果 $vZ_0 v'$, 则对命题符号的赋值在 v 和 v' 上相同
- (正向条件) 对 $i < n$, 如果 $vZ_{i+1} v'$ 且 Rvu , 则存在 u' 有 $Rv'u'$ 且 $uZ_i u'$

有穷模型性

定义 (n -互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的 w 和 w' 。对 $n \in \mathbb{N}$, 称 w 与 w' 是 n -互模拟的, 记作 $w \sqsubseteq_n w'$, 当且仅当存在一个二元关系序列 $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$ 满足:

- wZ_nw'
- 如果 vZ_0v' , 则对命题符号的赋值在 v 和 v' 上相同
- (反向条件) 对 $i < n$, 如果 $vZ_{i+1}v'$ 且 $Rv'u'$, 则存在 u 有 Rvu 且 uZ_iu'

有穷模型性

事实

给定基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的 w 和 w' 。

- 如果 $w \sqsubset_{n+1} w'$, 那么 $w \sqsubset_n w'$
- 如果 $w \sqsubset w'$, 那么对任意 n 有 $w \sqsubset_n w'$ 。反之未必成立。

(习题) 一般模态语言类型的 n -互模拟定义

习题

- 2.1.7
- 给出一般模态语言类型的 n -互模拟的定义

下期预告

- 过滤法构造有穷模型