

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2026 年秋季

前情提要

- 框架与模型
- 模型（局部）真、模型全局真、框架局部有效、框架（全局）有效、框架类有效、有效
- $\Sigma \Vdash_S \phi$ 、 $\Sigma \Vdash_S^g \varphi$
- K-系统及其可靠性

正规模态逻辑

定义 (正规模态逻辑)

我们定义 **正规模态逻辑** (normal modal logic) 为一个公式集 Λ , 它包含所有的命题逻辑重言式例式、(K)、(Dual) 并且在分离规则、统一替换规则和必然化规则下封闭。

例

- **K** 是最小的正规模态逻辑
- **K4** 是 **K** 的基础上添加公理 $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ 得到的
- 令 F 是所有基本模态逻辑框架组成的框架类，定义

$$\Lambda_F = \{\phi \mid F \Vdash \phi\}$$

则 Λ_F 是一个正规模态逻辑

模态不变性

回忆：一阶谓词逻辑表达力的界限：同态、同构、子模型、初等等价

不变性 (invariance) 结果刻画了一种人工语言的表达力界限，同时勾勒出所关心的研究领域

模态不变性

定义

- 给定模态语言类型 τ 和 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的状态 w 和 w' 。定义 w 的 τ -理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$ 。我们称 w 和 w' 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightarrow w'$ ，当且仅当它们有相同的 τ -理论
- 我们定义模型 $\mathfrak{M}$ 的 τ -理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$ 。我们称模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}'$ ，当且仅当它们有相同的 τ -理论

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ , 索引集 I . 对每个 $i \in I$, $\mathfrak{M}_i$ 是一个 τ -模型。对任意 $i \in I$ 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有

$$\mathfrak{M}_i, w \rightsquigarrow \bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i, (i, w)$$

即不交并保持模态不变性

模态不变性

定义 (全局模态词)

- 我们定义 (一元) **全局菱形模态词** E 的语义如下:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash E\phi \Leftrightarrow \text{存在 } \mathfrak{M} \text{ 中的 } v \text{ 有 } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

- 定义对偶的 **全局方块模态词** A 的语义为:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A\phi \Leftrightarrow \text{所有 } \mathfrak{M} \text{ 中的 } v \text{ 有 } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

模态不变性

定义 (全局模态词)

- 我们定义 (一元) **全局菱形模态词** E 的语义如下:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash E\phi \Leftrightarrow \text{存在 } \mathfrak{M} \text{ 中的 } v \text{ 有 } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

- 定义对偶的 **全局方块模态词** A 的语义为:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A\phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \Vdash \phi$$

模态不变性

事实

不存在基本模态逻辑公式 $\alpha(p)$, 使得对任意模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 中 w 都有

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \alpha(p) \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash Ap$$

模态不变性

定义 (生成子模型)

考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 。我们称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 **子模型**，当且仅当 $W' \subset W$, $R' = R \cap W' \times W'$ 且每个 $V'(p) = V(p) \cap W'$ 。我们称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 **生成子模型** (generated submodel)，记作 $\mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}$ ，如果 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子模型，且有下列封闭性质

$$\forall w \in W' \forall v \in W \ R_{wv} \rightarrow v \in W'$$

模态不变性

定义 (生成子模型)

- 对 $X \subset W$, 称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 **由 X 生成的子模型**, 当且仅当 $\mathfrak{M}'$ 是最小的包含 X 的 $\mathfrak{M}$ 的生成子模型
- 我们称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个 **点生成子模型** (point generated model), 当且仅当 $\mathfrak{M}'$ 是由一个单点集 $\{w\}$ ($w \in W$) 生成的。我们称 w 是 $\mathfrak{M}'$ 的 **根**

模态不变性

定义 (生成子模型)

- 对一般模态语言类型 τ , 我们要求 **生成子模型** 满足对应的封闭性质: 对任意 $\Delta \in \tau$,

$$\forall w \in W' \forall v_1, \dots, v_n \in W \ R_{\Delta} w v_1 \dots v_n \rightarrow v_1, \dots, v_n \in W'$$

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ , 给定 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的生成子模型 $\mathfrak{M}'$, 对每个公式 ϕ 以及每个 $\mathfrak{M}'$ 中的 w 有

$$\mathfrak{M}, w \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}', w \models \phi$$

证明.

对公式归纳

模态不变性

注意:

- 不交并的模态不变性结果是生成子模型的模态不变性的特殊情况
- 利用生成子模型方法可以证明“回看模态词” $\diamond^{-1}$ 不可定义, 即不存在基本模态逻辑公式 $\alpha(p)$, 使得

$$\mathfrak{M}, w \models \alpha(p) \Leftrightarrow \exists v \in W \text{ } Rvw \wedge \mathfrak{M}, v \models p \text{ 总成立}$$

- 点生成子模型可能是最常用的简化模型的手段

模态不变性

定义 (同态)

给定模态语言类型 τ 。给定 τ 模型 $\mathfrak{M} = (W, R_\Delta, V)_{\Delta \in \tau}$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R'_\Delta, V')_{\Delta \in \tau}$, 我们称函数 $h: W \rightarrow W'$ 是一个 (强) **同态** (homomorphism), 当且仅当它满足:

- 对任意 $p \in \Phi$, 任意 $w \in W$, $w \in V(p)$ **当且仅当** $f(w) \in V'(p)$
- 对每个 n 元模态词 $\Delta \in \tau$, 对任意 $w_0, \dots, w_n \in W$, $R_\Delta w_0 \dots w_n$ **当且仅当** $R'_\Delta f(w_0) \dots f(w_n)$

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ , 给定 τ 模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 。如果存在它们之间的**满**同态 $h: W \rightarrow W'$, 那么对任意 $w \in W$,

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', h(w)$$

甚至,

$$\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}'$$

模态不变性

- 同态不保证模态不变性

例

令 $\mathfrak{M} = (\{w\}, \emptyset, V)$, $\mathfrak{M}' = (\{u, v\}, \{\langle u, v \rangle\}, V')$ ($V(p) = \emptyset$ 而 $V'(p) = \{v\}$)。映射 $h : w \mapsto u$ 是 (强) 同态, 但 $\mathfrak{M}, w \models \Box \perp$ 而 $\mathfrak{M}', h(w) \models \Diamond \top$, 从而 $\mathfrak{M}, w \not\sim \mathfrak{M}', h(w)$ 。

- 满同态保持模态不变性。事实上, 满同态可以保持一阶谓词逻辑量词的解释, 其保持不变性的能力 “超出了” 模态逻辑公式的表达能力

互模拟

定义 (互模拟)

先考虑基本模态逻辑语言。给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 。我们称一个非空的关系 $Z \subset W \times W'$ 是一个 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟 (bisimulation), 记作

$Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$, 当且仅当它满足: 对任意 $w \in W, w' \in W'$

- 如果 wZw' , 那么对任意 $p \in \Phi$, $w \in V(p)$ 当且仅当 $w' \in V'(p)$
- 对任意 $v \in W$, 如果 wZw' 且 Rwv , 那么存在 $v' \in W'$ 使得 vZv' 且 $R'w'v'$ (正向条件)

互模拟

定义 (互模拟)

先考虑基本模态逻辑语言。给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 。我们称一个非空的关系 $Z \subset W \times W'$ 是一个 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟 (bisimulation), 记作

$Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$, 当且仅当它满足: 对任意 $w \in W, w' \in W'$

- 如果 wZw' , 那么对任意 $p \in \Phi$, $w \in V(p)$ 当且仅当 $w' \in V'(p)$
- 对任意 $v' \in W'$, 如果 wZw' 且 $Rw'v'$, 那么存在 $v \in W$ 使得 vZv' 且 Rwv (反向条件)

互模拟

定义 (互模拟)

- 如果 $Z : \mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}'$ 且 wZw' , 我们称 w 与 w' 是 **互似的** (bisimilar), 记作 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$ 或 $Z : w \rightleftharpoons w'$ (如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 由上下文可知)
- 我们用 $\mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \rightleftharpoons w'$ 表示存在 Z 使得 $Z : \mathfrak{M}, w \rightleftharpoons \mathfrak{M}', w'$

互模拟

定义 (互模拟)

- 一般版本的定义: 给定模态语言类型 τ 和 n 元模态词 $\Delta \in \tau$ 。任给 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 和 $\mathfrak{M}'$ 中的 w' , 基本语言版本中的正向、反向条件分别改写为: 对每个 R_Δ
 - 对任意 $v_1, \dots, v_n \in W$, 若 wZw' 且 $R_\Delta w v_1 \dots v_n$, 则存在 $v'_1, \dots, v'_n \in W'$ 使得, $R'_\Delta w' v'_1 \dots v'_n$ 且对每个 $1 \leq i \leq n$ 有 $v_i Z v'_i$

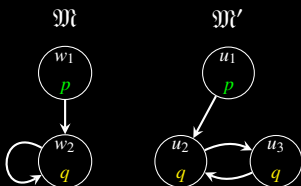
互模拟

定义 (互模拟)

- 一般版本的定义: 给定模态语言类型 τ 和 n 元模态词 $\Delta \in \tau$ 。任给 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 和 $\mathfrak{M}'$ 中的 w' , 基本语言版本中的正向、反向条件分别改写为: 对每个 R_Δ
 - 对任意 $v'_1, \dots, v'_n \in W'$, 若 wZw' 且 $R'_\Delta w'v'_1 \dots v'_n$, 则存在 $v_1, \dots, v_n \in W$ 使得, $R_\Delta wv_1 \dots v_n$ 且对每个 $1 \leq i \leq n$ 有 $v_iZv'_i$

互模拟

例



结构对比:

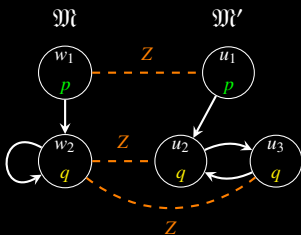
- $\mathfrak{M}$ 中 w_2 有自环
- $\mathfrak{M}'$ 中只有二元环 (无自环)

一阶语言可区分:

$\mathfrak{M}, w_1 \models \exists y(Rw_1y \wedge Ryy)$,
但该性质在 $\mathfrak{M}', u_1$ 处不成立。

互模拟

例



建立关系 Z :

$$Z = \{\langle w_1, u_1 \rangle, \langle w_2, u_2 \rangle, \langle w_2, u_3 \rangle\}$$

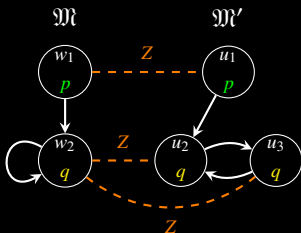
原子命题条件:

- $w_1 Z u_1$: 均满足 p
- $w_2 Z u_2$: 均满足 q
- $w_2 Z u_3$: 均满足 q

关联状态的命题赋值完全一致!

互模拟

例



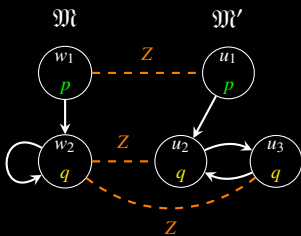
正向条件 (Forth):

- $w_1 \rightarrow w_2$ 由 $u_1 \rightarrow u_2$ 匹配 ($w_1 Z u_1$)
- 自环 $w_2 \rightarrow w_2$ 由 $u_2 \rightarrow u_3$ 匹配 ($w_2 Z u_3$)
- 自环 $w_2 \rightarrow w_2$ 由 $u_3 \rightarrow u_2$ 匹配 ($w_2 Z u_2$)

$\mathfrak{M}$ 的每步迁移在 $\mathfrak{M}'$ 中均可匹配!

互模拟

例



反向条件 (Back):

- $u_1 \rightarrow u_2$ 由 $w_1 \rightarrow w_2$ 匹配 ($w_2 Z u_2$)
- $u_2 \rightarrow u_3$ 由 $w_2 \rightarrow w_2$ 匹配 ($w_2 Z u_3$)
- $u_3 \rightarrow u_2$ 由 $w_2 \rightarrow w_2$ 匹配 ($w_2 Z u_2$)

结论: $w_1 \sqsubset u_1$, 故 $w_1 \leftrightarrow u_1$ 。

模态逻辑无法区分自环与二元环!

互模拟

定理

给定模态逻辑语言类型 τ 以及 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 。对任意 $\mathfrak{M}$ 中 w 以及 $\mathfrak{M}'$ 中 w' 都有 $w \sqsubseteq w'$ 蕴含 $w \leftrightarrow w'$

证明.

对公式归纳

互模拟

事实

给定模态逻辑语言类型 τ 以及 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 、 $\mathfrak{M}'$ 以及 $\mathfrak{M}_i$
($i \in I$)

- 对任意 $i \in I$, 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有 $\mathfrak{M}_i, w \sqsubseteq \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, (i, w)$
- 如果 $\mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}$, 那么对任意 $\mathfrak{M}'$ 中 w 有 $\mathfrak{M}', w' \sqsubseteq \mathfrak{M}, w$
- 如果 $h : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ 是满同态, 那么对任意 $\mathfrak{M}$ 中 w 有 $\mathfrak{M}, w \sqsubseteq \mathfrak{M}', h(w)$

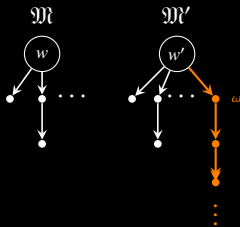
互模拟

互模拟似乎是最一般的保持模态不变性的概念，它是否能“完美”刻画模态公式的表达能力？即，是否有

$$\mathfrak{M}, w \sqsubseteq \mathfrak{M}', w' \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w' ?$$

互模拟

例 (模态等价但不互模拟)



模型构造: (命题赋值均为空)

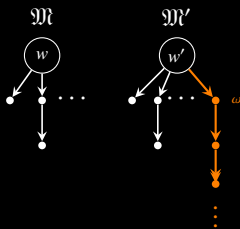
- $\mathfrak{M}$: 根 w 具有**所有有穷长**分支 (长 $1, 2, \dots$)
- $\mathfrak{M}'$: 在 $\mathfrak{M}$ 基础上增添一条**无穷长分支** (ω)

模态等价 ($w \rightsquigarrow w'$):

- 任取公式 ϕ , 设深度 $k = \text{deg}(\phi)$
- ϕ 仅能探测长至多为 k 的路径
- 两模型在深度 $\leq k$ 处结构完全相同, 故 $\mathfrak{M}, w \rightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$

互模拟

例 (模态等价但不互模拟)



已知: $w \leftrightarrow w'$ (单个公式均无法区分二者)。

但不互模拟 ($w \not\sim w'$):

- 反设存在互模拟 Z 使得 wZw'
- 在 $\mathfrak{M}'$ 中, 从 w' 沿无穷分支走一步到达 v_1
- 反向条件要求 w 存在后继 u 满足 uZv_1

互模拟

定义

给定模态语言类型 τ , 我们称 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 是 **相有穷的** (image-finite), 当且仅当对每个 $\mathfrak{M}$ 中 $n+1$ 元关系 R 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w , $\{(v_1, \dots, v_n) \mid R w v_1 \dots v_n\}$ 是有穷的。

定理

如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是两个相有穷的 τ -模型, 那么对任意 $w \in W$ 和 $w' \in W'$ 有

$$w \preceq w' \Leftrightarrow w \dot{\sim} w'$$

互模拟

Hennessy-Milner 定理证明概要

只需证 ($\Leftarrow$): 模态等价关系 $\leftrightarrow$ 本身是一个互模拟 (以基本语言为例)。设 $u \leftrightarrow u'$

习题

- 1.6.1-1.6.3, 1.6.7
- 2.1.1, 2.1.6 (bounded morphism 定义见书)
- 2.2.1, 2.2.4, 2.2.8

下期预告

- 有穷模型性 (续)
- 标准翻译