

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2026 年秋季

前情提要

- 模态逻辑的语言，模态语言类型
- 框架与模型

模型与框架

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ) -模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash_{\Delta} (\phi_1, \dots, \phi_n) \Leftrightarrow \text{存在 } v_1, \dots, v_n \in W \text{ 使得} \\ R_{\Delta} w v_1 \dots v_n \text{ 且对任意 } 1 \leq i \leq n \\ \text{有 } \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$$

模型与框架

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 中的状态 w 上有效 (valid), 记作 $\mathfrak{F}, w \models \phi$, 当且仅当对每个赋值 V 有 $(\mathfrak{F}, V), w \models \phi$
- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效, 记作 $\mathfrak{F} \models \phi$, 当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ 中的每个状态 w 上有效

模型与框架

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 令 F 是一个 τ -框架类, 称公式 ϕ **在框架类 F 上有效**, 记作 $F \models \phi$, 当且仅当 ϕ 在 F 中的每个框架上有效。我们用 Λ_F 表示所有在 F 上有效的公式组成的集合, 并称之为 **F 的逻辑** (logic of F)
- 称 ϕ **有效**, 记作 $\models \phi$, 当且仅当 ϕ 在所有 τ -框架上有效。

模型与框架

例 (状态上的有效性与框架上的有效性)

令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ ，其中 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$ ， $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ 。

- $\mathfrak{F}, s_1 \models \phi$, $\mathfrak{F}, s_2 \models \phi$: 各只有一个后继
- 是否 $\mathfrak{F} \models \phi$?
- $\mathfrak{F}, s_0 \not\models \phi$: 取 $V(p) = \{s_1\}$ 作为反例

模型与框架

例 (状态上的有效性与框架上的有效性)

令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ ，其中 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$ ， $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ 。

- $\mathfrak{F}, s_1 \models \phi$, $\mathfrak{F}, s_2 \models \phi$: 各只有一个后继
- 是否 $\mathfrak{F} \models \phi$?
- $\mathfrak{F}, s_0 \not\models \phi$: 取 $V(p) = \{s_1\}$ 作为反例

模型与框架

例 (状态上的有效性与框架上的有效性)

令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ ，其中 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$ ， $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ 。

- $\mathfrak{F}, s_1 \models \phi$, $\mathfrak{F}, s_2 \models \phi$: 各只有一个后继
- 是否 $\mathfrak{F} \models \phi$?
- $\mathfrak{F}, s_0 \not\models \phi$: 取 $V(p) = \{s_1\}$ 作为反例

模型与框架

例 (框架上的有效性与框架类上的有效性)

仍令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取 $\mathcal{G} = (\{s_0, s_1\}, \{(s_0, s_1), (s_1, s_1)\})$ 。

- $\mathcal{G} \models \phi$: 每个状态都只有一个后继
- 令 $\mathcal{D}$ 为每个状态至多有一个后继的框架类, 则 $\mathcal{D} \models \phi$
- 令 $\mathbf{Fin}$ 为所有有穷框架组成的类。虽然 $\mathcal{G} \in \mathbf{Fin}$ 且 $\mathcal{G} \models \phi$, 但 $\mathbf{Fin} \not\models \phi$: 上一页的 $\mathcal{F}$ 就是反例

模态语义后承

记法

- 如果 S 是模型类, 称 $\mathfrak{M}$ 是来自 S 的模型, 即 $\mathfrak{M} \in S$
- 如果 S 是框架类, 称 $\mathfrak{M}$ 是来自 S 的模型, 即 $\mathfrak{M}$ 是 S 中某个框架基础上的模型
- 给定模态逻辑语言类型 τ , 当我们提到一个 τ -结构类 S , 要么 S 是一个 τ -模型类, 要么是一个 τ -框架类

模态语义后承

定义 (局部语义后承)

给定模态语言类型 τ , 和 τ -结构类 S 。令 Σ 和 ϕ 分别是语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式集和公式。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的 (局部) 语义后承, 记作 $\Sigma \Vdash_S \phi$, 当且仅当对任意来自 S 的模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中的任何状态 w 有, $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

模态语义后承

例

- $\Diamond\Diamond p \Vdash_{\text{Tran}} \Diamond p$ (Tran 是传递框架类)
- $p \Vdash_S \neg p$, 其中 S 是基本模态逻辑的模型类:

$$S = \{(\mathfrak{F}, V) \mid V(p) = \emptyset\}$$

模态语义后承

例

- $p \Vdash_{\text{BTL}} Gp$ (BTL 是双向时态框架类, 当前为真蕴含未来任何时刻 “过去曾为真”)
- $K_A p \Vdash_{\text{Inc}} K_B p$ (Inc 满足 $R_B \subseteq R_A$: 信息更充分的 Agent B 必然知道 A 所知道的一切)
- $\Diamond_1 \Diamond_2 p \Vdash_{\text{Comm}} \Diamond_2 \Diamond_1 p$ (Comm 是满足 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$ 的可交换框架类)

模态语义后承

定义 (全局语义后承)

同样给定 τ, S, Σ, ϕ 。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的全局语义后承，记作 $\Sigma \Vdash_S^g \phi$ ，当且仅当对每个来自 S 的结构 $\mathcal{G}$ 都有， $\mathcal{G} \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathcal{G} \Vdash \phi$

例

$p \Vdash_S^g \Box p$ ，其中 S 可以是任何结构类

注意：我们一般关心基于框架类的局部语义后承。 $\Vdash_S \varphi$ 和 $\Vdash_S^g \varphi$ 有区别吗？

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

定义

- **K** 的公理包括

- 所有命题重言式例式

- (K) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

- (Dual) $\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**
定义

- **K 的证明规则** 包括
 - 分离规则 (*modus ponens*): 由 ϕ 和 $\phi \rightarrow \psi$ 可证 ψ
 - **必然化规则** (generalization): 由 ϕ 可证 $\Box\phi$
 - **统一代入规则** (uniform substitution): 由 ϕ 可证 ϕ^σ

K-系统

定义

- 定义一个 **K-证明** 为一个有穷公式序列，其中每条公式要么是 **K** 的公理，要么是由之前的公式应用 **K** 中证明规则得到的。
- 我们称一个公式 ϕ 是 **K-可证的**，当且仅当 ϕ 是某个 **K-证明** 的最后一条公式，记作 $\vdash_K \phi$

K-系统

例

$$1 \quad p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$$

$$2 \quad \Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$$

$$3 \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

$$4 \quad \Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$$

$$5 \quad \Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$$

$$6 \quad \Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$$

$$7 \quad \Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)), \text{ 即 } (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$$

K 的可靠性

- 所有命题逻辑重言式例式、(Dual)和(K)都是有效的
- 分离规则保持框架类，框架全局/局部有效性，模型全局真和局部真（满足）
- 统一代入保持框架类，框架全局/局部有效性，不保持模型全局真或局部真
- 必然化规则保持框架类，框架（全局）有效性，模型全局真，不保持框架局部有效性或模型局部真

K 的可靠性

例 (统一代入不保持模型的全局真或局部真)

考虑模型 $\mathfrak{M} = (\{w\}, \emptyset, V)$, 其中 $V(p) = \{w\}$:

- 由于 p 在模型的所有状态上均成立, 故 $\mathfrak{M} \models p$ (模型全局真, 亦在 w 局部真)
- 取代入 $\sigma(p) = \perp$, 则 $p^\sigma = \perp$
- 显然 $\mathfrak{M} \not\models \perp$ 且 $\mathfrak{M}, w \not\models \perp$

注意: 模型中的真值依赖于具体的赋值 V 。代入操作改变了命题变元, 破坏了给定的具体赋值; 而框架有效性对所有赋值量化 ($\forall V$), 因而能被统一代入保持。

K 的可靠性

考虑框架 $\mathfrak{F} = (\{u, v\}, \{(u, v)\})$:

例 (必然化不保持模型局部真)

令赋值 $V(p) = \{u\}$, 得模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$:

- $\mathfrak{M}, u \Vdash p$ (在 u 局部真)
- 但其后继 $v \nVdash p$, 故 $\mathfrak{M}, u \nVdash \Box p$

K 的可靠性

考虑框架 $\mathfrak{F} = (\{u, v\}, \{(u, v)\})$:

例 (必然化不保持框架局部有效性)

考虑公式 $\phi := \Diamond \top$ (“存在后继”):

- 对任意赋值 V 均有 $(\mathfrak{F}, V), u \models \phi$, 故 $\mathfrak{F}, u \models \Diamond \top$ (在 u 局部有效)
- 对任意 / 存在赋值 V 均有 $(\mathfrak{F}, V), v \not\models \Diamond \top$
- 从而 $\mathfrak{F}, u \not\models \Box \Diamond \top$

K 的可靠性

我们一般期望用模态逻辑公理系统来刻画（框架类）**有效性**
事实

K 是（针对所有框架的类）可靠的，即 $\vdash_K \phi$ 蕴涵对任意框架 $\mathfrak{F}$ 有 $\mathfrak{F} \models \phi$

事实上，**K** 也是（针对所有框架的类）完全的。在这个意义上，我们称 **K** 是（克里普克语义学意义上）**极小的**模态逻辑公理系统

正规模态逻辑

定义 (正规模态逻辑)

我们定义 **正规模态逻辑** (normal modal logic) 为一个公式集 Λ , 它包含所有的命题逻辑重言式例式、(K)、(Dual) 并且在分离规则、统一替换规则和必然化规则下封闭。

例

- **K** 是最小的正规模态逻辑
- **K4** 是 **K** 的基础上添加公理 $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ 得到的
- 令 F 是所有基本模态逻辑框架组成的框架类，定义

$$\Lambda_F = \{\phi \mid F \Vdash \phi\}$$

则 Λ_F 是一个正规模态逻辑

模态不变性

回忆：一阶谓词逻辑表达力的界限：子模型、同态、同构、初等等价

不变性 (invariance) 结果刻画了一种人工语言的表达力界限，同时勾勒出所关心的研究领域

模态不变性

定义

- 给定模态语言类型 τ 和 τ -模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的状态 w 和 w' 。定义 w 的 τ -理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$ 。我们称 w 和 w' 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightarrow w'$ ，当且仅当它们有相同的 τ -理论
- 我们定义模型 $\mathfrak{M}$ 的 τ -理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$ 。我们称模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}'$ ，当且仅当它们有相同的 τ -理论

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ , 索引集 I . 对每个 $i \in I$, $\mathfrak{M}_i$ 是一个 τ -模型. 对任意 $i \in I$ 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有

$$\mathfrak{M}_i, w \rightsquigarrow \bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w$$

即不交并保持模态不变性

证明.

对 τ -公式复杂度归纳证明

习题

- 1.6.1-1.6.3

- 1.6.7

教材勘误:

<https://staff.fnwi.uva.nl/y.venema/mlbook/errata.pdf>

下期预告

- 模态不变性与互模拟
- 有穷模型性