

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2026 年秋季

课程信息

- 时间地点:

- 周二 8:00 - 09:40, HGX305

- 网站:

- <https://web.yangruizhi.cyou/modal2026/>

- 教材: Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde

- Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002

- 考试形式: 闭卷

前情提要

- 命题逻辑与一阶谓词逻辑的语言、语义和公理系统
- 命题逻辑是可判定的，一阶谓词逻辑不是可判定的
- 命题逻辑公式定义布尔函数，一阶谓词逻辑语句定义结构类

模态逻辑的语言

定义 (基本模态语言)

我们定义基本模态语言 (basic modal language) 为:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi$$

基本模态逻辑的语言在命题逻辑的基础上添加了一个——
元模态词 (modal operator): $\Diamond$ (Diamond)

模态逻辑的语言

记法

我们规定如下缩写：

$$\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi \quad (\text{Box})$$

$$\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

$$\top := \neg\perp$$

模态逻辑的语言

定义 (模态语言类型)

一个 **模态语言类型** (modal similarity type) 是一个有序对 $\tau = (O, p)$, 其中 O 是模态词的集合, 非空。 $p : O \rightarrow \mathbb{N}$ 告诉我们每个模态词是几元的。

给定命题变元符号集 Φ 和模态语言类型 $\tau = (O, p)$, 唯一决定了模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg \phi \mid \phi \vee \psi \mid \Delta (\phi_1, \dots, \phi_{p(\Delta)})$$

其中 $p \in \Phi$ 、 $\Delta \in O$ 。用 $Form(\tau, \Phi)$ 表示该语言的公式集

模态逻辑的语言

例

基本时态逻辑：有两个一元模态词 $O = \{F, P\}$ 。 F 和 P 类似 $\diamond$ 算子。 $F\phi$ 常读作 “在未来某个时刻 ϕ (成立)”， $P\phi$ 读作 “在过去某个时刻 ϕ ”。通常定义 $G\phi := \neg F\neg\phi$ ，表示 “未来总是 ϕ ”；定于 $H\phi := \neg P\neg\phi$ ，表示 “过去一直 ϕ ”。

$$\blacksquare P\phi \rightarrow GP\phi$$

$$\blacksquare F\phi \rightarrow FF\phi$$

$$\blacksquare GFp \rightarrow FGp$$

(Mckinsey formula)

模态逻辑的语言

例

时态逻辑可以加入更丰富的模态词，如二元模态词 $U(\phi, \psi)$ ，读作“ ψ 直到 ϕ ” (ψ until ϕ)，二元模态词 $S(\phi, \psi)$ ，读作“自从 ϕ ， ψ ” (ψ since ϕ)

$$\blacksquare F\phi \leftrightarrow U(\phi, \top), \quad P\phi \leftrightarrow S(\phi, \top)$$

模态逻辑的语言

定义 (代入)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$, 一个该语言的 **代入** (substitution) 是一个函数 $\sigma : \Phi \rightarrow Form(\tau, \Phi)$ 。一个代入可以被扩张到定义在全体公式集上的函数 $(\cdot)^\sigma : Form(\tau, \Phi) \rightarrow Form(\tau, \Phi)$:

模态逻辑的语言

例 (代入)

假设 $\sigma(p) = \Diamond q, \sigma(q) = \Box p$

- $p^\sigma = \Diamond q$

- $(p \rightarrow q)^\sigma = \Diamond q \rightarrow \Box p$

我们称 $\Diamond q \rightarrow \Box p$ 是 $p \rightarrow q$ 的一个 代入例式

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的框架)

定义基本模态逻辑语言的 **框架** (Frame) 是一个有序对

$\mathcal{F} = (W, R)$, 其中

- W 是一个非空集合 (状态集、可能世界集)
- R 是 W 上的二元关系 (可及关系, accessibility relation)

注意: 一个基本模态逻辑语言的框架也是一个仅含有一个二元谓词符号的一阶逻辑语言的结构

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的模型)

- 基本模态逻辑语言的 **模型** 是一个有序对 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ (当 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 时也记作三元组 (W, R, V)), 其中 $\mathfrak{F}$ 是一个基本模态逻辑语言的框架, 而 V 是以命题符号集 Φ 为定义域到 $P(W)$ 中的 **赋值函数** (即 $V: \Phi \rightarrow P(W)$), 也即对每个命题符号 $p \in \Phi$, $V(p) \subset W$.
- 我们称模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ 是 **框架 $\mathfrak{F}$ 基础上的模型**, 或 $\mathfrak{F}$ 是 **模型 $\mathfrak{M}$ 底下的框架**

模型与框架

注意:

- 直观上, 模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中的赋值函数告诉我们每个命题 p 恰好在 $V(p)$ 中的那些可能世界或状态下成立
- 一个基本模态逻辑语言的模型也可以看作是一个含有一个二元谓词符号和无穷个一元谓词符号的一阶逻辑语言的结构 $(W, R, V(p))_{p \in \Phi}$

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的语义)

假设 w 是基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中的状态 (即 $w \in W$), 我们对基本模态逻辑语言公式 ϕ 递归定义三元关系 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 状态上成立 (记作 $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$) 如下:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \Leftrightarrow w \in V(p)$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \perp \quad \text{从不}$$

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的语义)

假设 w 是基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中的状态 (即 $w \in W$), 我们对基本模态逻辑语言公式 ϕ 递归定义三元关系 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 状态上成立 (记作 $\mathfrak{M}, w \models \phi$) 如下:

$$\mathfrak{M}, w \models \neg\phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \not\models \phi$$

$$\mathfrak{M}, w \models \phi \vee \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \models \phi \text{ 或 } \mathfrak{M}, w \models \psi$$

$$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\phi \Leftrightarrow \exists v \in W (R_{wv} \wedge \mathfrak{M}, v \models \phi)$$

模型与框架

记法

- 对公式集 Σ , 我们用 $\mathfrak{M}, w \models \Sigma$ 表示 Σ 中的每个公式在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 状态上成立
- 赋值函数 $V: \Phi \rightarrow P(W)$ 可以被自然地推广到所有公式上:

$$V(\phi) = \{w \in W \mid \mathfrak{M}, w \models \phi\}$$

模型与框架

定义

- 我们称公式 ϕ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中 **全局真** (globally true) 或 **普遍真** (universally true), 记作 $\mathfrak{M} \models \phi$, 当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的**每个**状态上成立。
- 称公式 ϕ **在模型 $\mathfrak{M}$ 上可满足**, 当且仅当它在 $\mathfrak{M}$ 中的**某个**状态上成立。
- 类似地, 我们可以定义一集公式 Σ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上全局真、可满足。

模型与框架

例

AI Agent 检索后可能从状态 s_0 进入 s_1 或 s_2 。令 p 表示“答案正确”， q 表示“附有出处”。设 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$, $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2)\}$, $V(p) = \{s_1\}$, $V(q) = \{s_1, s_2\}$ 。

- 在 s_0 上, $\Diamond p$ 、 $\Box p$ 、 $\Box q$ 分别成立吗?
- q 在 $\mathfrak{M}$ 上全局真吗?

模型与框架

例

- $W = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, R 是后继关系, $V(p) = \{1, 2\}$,
 $V(q) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $V(r) = \emptyset$
 - $\mathfrak{M}, 0 \models \Diamond \Box p \rightarrow p$?
 - $1 \models \Diamond(p \wedge \neg r)$?
 - $0 \models q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$?
 - $\mathfrak{M} \models \Box q$?

模型与框架

例

- $W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, xRy 当且仅当 $x < y$ 且 x 整除 y , $V(p) = \{4, 8, 12, 24\}$, $V(q) = \{6\}$
 - $4 \models \Box p$
 - $2 \not\models \Box p$
 - $2 \models \Diamond(q \wedge \Box p) \wedge \Diamond(\neg q \wedge \Box p)$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 给定模态逻辑语言类型 τ , 一个 τ -框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\Delta)_{\Delta \in \tau}$ 包含一个非空状态集合 W 以及每个 τ 中 n 元模态词 Δ 对应的 $(n+1)$ 元关系 $R_\Delta \subset W^{n+1}$
- 一个 (τ, Φ) -模型是有序对 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, 其中 $\mathfrak{F}$ 是一个 τ -框架, $V : \Phi \rightarrow P(W)$ 是赋值函数

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ) -模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash_{\Delta} (\phi_1, \dots, \phi_n) \Leftrightarrow \text{存在 } v_1, \dots, v_n \in W \text{ 使得} \\ R_{\Delta} w v_1 \dots v_n \text{ 且对任意 } 1 \leq i \leq n \\ \text{有 } \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ) -模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同:

若 Δ 是 0 元模态词, 即 R_Δ 是 W 子集

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta \iff w \in R_\Delta$$

模型与框架

例

用 0 元模态词 I 表示 “当前状态是初始状态”。设

$W = \{s_0, s_1, s_2\}$, $R_I = \{s_0\}$, 则:

- $\mathfrak{M}, s_0 \models I$, 而 $\mathfrak{M}, s_1 \not\models I$ 、 $\mathfrak{M}, s_2 \not\models I$
- I 本身就是公式, 不需要接受公式作为参数

注意: R_I 由框架给定。固定框架而改变赋值 V 时, I 的真假不变, 命题变元 p 的真假则可以改变。

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ) - 模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同:

一般用 ∇ 表示 Δ 的对偶

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \nabla(\phi_1, \dots, \phi_n) \Leftrightarrow ?$$

模型与框架

例

用二元模态词 Δ 描述任务分解: $R_{\Delta}s_0s_1s_2$ 表示将 s_0 分成有序的两个子任务 s_1, s_2 。

设 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$, $R_{\Delta} = \{(s_0, s_1, s_2)\}$, $V(p) = \{s_1\}$, $V(q) = \{s_2\}$ 。判断:

- 在 s_0 上, $\Delta(p, q)$ 、 $\Delta(q, p)$ 分别成立吗?
- 在 s_0 上, $\nabla(p, \perp)$ 、 $\nabla(\perp, \perp)$ 分别成立吗?

模型与框架

例 (字符串)

取 $W = \{a, b\}^{<\omega}$ 为由 a, b 生成的所有有穷字符串的集合, ε 表示空串, uv 表示字符串拼接。取如下模态词 (其中 $w, u, v \in W$):

- 0 元模态词 E : $R_E = \{\varepsilon\}$
- 一元模态词 A, B : $R_A w v \Leftrightarrow w = av$, $R_B w v \Leftrightarrow w = bv$
- 二元模态词 C : $R_C w u v \Leftrightarrow w = uv$

模型与框架

例 (字符串 (续))

在上述框架上的任意模型 $\mathfrak{M}$ 中:

- $\mathfrak{M}, \varepsilon \Vdash E$
- $\mathfrak{M}, a \Vdash AE, \mathfrak{M}, b \Vdash BE$
- 在 ab 上, ABE 与 $C(AE, BE)$ 都成立
- 判断: $\mathfrak{M}, ab \Vdash C(BE, AE)$?

注意: 这些公式不含命题变元, 真假不依赖赋值 V 。

模型与框架

回忆: 命题逻辑重言式与一阶谓词逻辑有效性

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 中的状态 w 上有效 (valid), 记作 $\mathfrak{F}, w \models \phi$, 当且仅当对每个赋值 V 有 $(\mathfrak{F}, V), w \models \phi$
- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效, 记作 $\mathfrak{F} \models \phi$, 当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ 中的每个状态 w 上有效

模型与框架

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 令 F 是一个 τ -框架类, 称公式 ϕ **在框架类 F 上有效**, 记作 $F \models \phi$, 当且仅当 ϕ 在 F 中的每个框架上有效。我们用 Λ_F 表示所有在 F 上有效的公式组成的集合, 并称之为 **F 的逻辑** (logic of F)
- 称 ϕ **有效**, 记作 $\models \phi$, 当且仅当 ϕ 在所有 τ -框架上有效。

模型与框架

例

- $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

- $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

- 考虑传递框架类

模型与框架

例

- $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
- $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
 - 考虑传递框架类

模型与框架

例 (状态上的有效性与框架上的有效性)

令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ ，其中 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$ ， $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ 。

- $\mathfrak{F}, s_1 \models \phi$, $\mathfrak{F}, s_2 \models \phi$: 各只有一个后继
- 是否 $\mathfrak{F} \models \phi$?
- $\mathfrak{F}, s_0 \not\models \phi$: 取 $V(p) = \{s_1\}$ 作为反例

模型与框架

例 (状态上的有效性与框架上的有效性)

令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$, 其中 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$,
 $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ 。

- $\mathfrak{F}, s_1 \models \phi$, $\mathfrak{F}, s_2 \models \phi$: 各只有一个后继
- 是否 $\mathfrak{F} \models \phi$?
- $\mathfrak{F}, s_0 \not\models \phi$: 取 $V(p) = \{s_1\}$ 作为反例

模型与框架

例 (状态上的有效性与框架上的有效性)

令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$, 其中 $W = \{s_0, s_1, s_2\}$, $R = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ 。

- $\mathfrak{F}, s_1 \models \phi$, $\mathfrak{F}, s_2 \models \phi$: 各只有一个后继
- 是否 $\mathfrak{F} \models \phi$?
- $\mathfrak{F}, s_0 \not\models \phi$: 取 $V(p) = \{s_1\}$ 作为反例

模型与框架

例 (框架上的有效性与框架类上的有效性)

仍令 $\phi := \Diamond p \rightarrow \Box p$ 。取 $\mathcal{G} = (\{s_0, s_1\}, \{(s_0, s_1), (s_1, s_1)\})$ 。

- $\mathcal{G} \models \phi$: 每个状态都只有一个后继
- 令 $\mathcal{D}$ 为每个状态至多有一个后继的框架类, 则 $\mathcal{D} \models \phi$
- 令 Fin 为所有有穷框架组成的类。虽然 $\mathcal{G} \in \text{Fin}$ 且 $\mathcal{G} \models \phi$, 但 $\text{Fin} \not\models \phi$: 上一页的 $\mathcal{F}$ 就是反例

模态语义后承

记法

- 如果 S 是模型类, 称 $\mathfrak{M}$ 是来自 S 的模型, 即 $\mathfrak{M} \in S$
- 如果 S 是框架类, 称 $\mathfrak{M}$ 是来自 S 的模型, 即 $\mathfrak{M}$ 是 S 中某个框架基础上的模型
- 给定模态逻辑语言类型 τ , 当我们提到一个 τ -结构类 S , 要么 S 是一个 τ -模型类, 要么是一个 τ -框架类

模态语义后承

定义 (局部语义后承)

给定模态语言类型 τ , 和 τ -结构类 S 。令 Σ 和 ϕ 分别是语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式集和公式。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的 (局部) 语义后承, 记作 $\Sigma \Vdash_S \phi$, 当且仅当对任意来自 S 的模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中的任何状态 w 有, $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

模态语义后承

例

- $\Diamond\Diamond p \Vdash_{\text{Tran}} \Diamond p$ (Tran 是传递框架类)
- $p \Vdash_S \neg p$, 其中 S 是基本模态逻辑的模型类:

$$S = \{(\mathfrak{F}, V) \mid V(p) = \emptyset\}$$

模态语义后承

定义 (全局语义后承)

同样给定 τ, S, Σ, ϕ 。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的全局语义后承，记作 $\Sigma \Vdash_S^g \phi$ ，当且仅当对每个来自 S 的结构 $\mathcal{G}$ 都有， $\mathcal{G} \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathcal{G} \Vdash \phi$

例

$p \Vdash_S^g \Box p$ ，其中 S 可以是任何结构类

注意：我们一般关心基于框架类的局部语义后承。 $\Vdash_S \varphi$ 和 $\Vdash_S^g \varphi$ 有区别吗？

习题

- 1.3.2 - 1.3.6
- 1.5.1 (改为 “ $\Box p \Vdash_{M(K)}^g p$ ”)
- 1.5.2
- 1.5.3 (改为 “ M denote the class of all models, ...
 $\Vdash_M^g \dots \Vdash_M^g$ ”)

教材勘误:

<https://staff.fnwi.uva.nl/y.venema/mlbook/errata.pdf>

下期预告

- 正规模态逻辑
- 模态不变性与互模拟