

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2026 年秋季

课程信息

- 时间地点:

- 周二 8:00 - 09:40, HGX305

- 网站:

- <https://web.yangruizhi.cyou/modal2026/>

- 教材: Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde

- Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002

- 考试形式: 闭卷

回顾：命题逻辑

命题逻辑语言的符号：

- 可数无穷多个 命题变元符号： $p_0, p_1, p_2, \dots$
- 命题常数符号： $\perp$ (Bottom), $\top$ (Top)
- 联词： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号： $(,)$

回顾：命题逻辑

命题逻辑合式公式

- 每个命题变元符号、命题常数符号都是 合式公式
- 若 ϕ, ψ 是合式公式, 那么
 $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$ 也是 合式公式

记法

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (真值指派)

我们说 V 是一个 **真值指派**，当且仅当 V 是以由命题符号组成的集合 $\mathcal{A}$ 为定义域、以**真值**集合 $\{0, 1\}$ 为值域的函数

$$V : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 V , 我们定义 V 的扩展 $\bar{V} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $p \in \mathcal{A}$, $\bar{V}(p) = V(p)$, $\bar{V}(\perp) = 0$, $\bar{V}(\top) = 1$

1 对任意公式 ϕ, ψ ,

$$\bar{V}(\neg\phi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 V , 我们定义 V 的扩展 $\bar{V} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $p \in \mathcal{A}$, $\bar{V}(p) = V(p)$, $\bar{V}(\perp) = 0$, $\bar{V}(\top) = 1$

1 对任意公式 ϕ, ψ ,

$$\bar{V}(\phi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 1 \text{ 或者 } \bar{V}(\psi) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑公理系统：

$$(A1) \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) \quad (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) \quad (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

■ 推演规则：分离规则

回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑语言符号：

- 命题联词： $\neg, \rightarrow$
- 量词： $\forall, \exists$
- 变元： $v_1, v_2, \dots$
- 常数符号： $c_1, c_2, \dots$
- 函数符号： $f_1, f_2, \dots$
- 谓词符号： $P_1, P_2, \dots$
- 等词： $\approx$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑的公理系统：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中变元 x 不在 α 中自由出现
- 5 $x \approx x$
- 6 $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

- 结构: $\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_k^{\mathfrak{A}})$
- 赋值: $s : \mathcal{V} \rightarrow |\mathfrak{A}|$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

- 塔斯基真定义：

- α 是原子公式

- $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 \approx t_2$, 当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

- $(\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \dots t_n$, 当且仅当 $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$, 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$

- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \rightarrow \gamma$, 当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

■ 塔斯基真定义：

- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \beta$, 当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$, 有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \beta$
其中 s_d^x 是通过对 s 改造得到的 $\mathfrak{A}$ -赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

回顾

命题逻辑与一阶逻辑的可靠性与完全性：

$$\Sigma \vdash \phi \Leftrightarrow \Sigma \models \phi$$

注意：命题逻辑是可判定的，一阶谓词逻辑不是可判定的

回顾

“定义”

- 命题逻辑的定义：一个命题逻辑公式 ϕ “定义” 了一个布尔函数 B_ϕ
- 一阶逻辑语句定义结构类
- 一阶谓词逻辑公式在结构中定义结构论域上的集合、关系、函数

同构与初等等价

回顾

经典逻辑（命题逻辑、一阶谓词逻辑）刻画的是“真”这个模态词

- 模态逻辑可以被用来刻画更多的模态词，如：可能/必然，将来/过去，知道，应该/允许，等等
- 模态（命题）逻辑是命题逻辑的扩张，是二阶谓词逻辑的片断

模态逻辑的语言

定义 (基本模态语言)

我们定义基本模态语言 (basic modal language) 为:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi$$

基本模态逻辑的语言在命题逻辑的基础上添加了一个——
元模态词 (modal operator): $\Diamond$ (Diamond)

模态逻辑的语言

记法

我们规定如下缩写：

$$\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi \quad (\text{Box})$$

$$\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

$$\top := \neg\perp$$

模态逻辑的语言

例

一般将 $\Diamond\phi$ 读作“ ϕ 是可能的”， $\Box\phi$ 即 $\neg\Diamond\neg\phi$ 则表示“非 ϕ 是不可能的”，也即“ ϕ 是必然的”。尝试翻译：

■ $\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$

■ $\phi \rightarrow \Diamond\phi$

■ $\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$

■ $\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$

模态逻辑的语言

例

一个配送机器人执行一次任务，结束时只能停在一个房间。
令 p 表示“机器人在 301 室”， q 表示“机器人在 302 室”。
这里 $\Diamond\phi$ 表示“有一次可能的任务执行，结束时 ϕ 成立”。
假设两个房间都可以到达，则：

- $\Diamond p \wedge \Diamond q$ 成立，但 $\Diamond(p \wedge q)$ 不成立
- 尝试比较： $\Diamond(p \vee q)$ 与 $\Diamond p \vee \Diamond q$

模态逻辑的语言

例

在认知逻辑 (epistemic logic) 中, $\Box\phi$ 常被写作 $K\phi$, 读作“(某人) 知道 ϕ ”

- $K\phi \rightarrow \phi$

- $K\phi \rightarrow KK\phi$

模态逻辑的语言

例

在可证性逻辑 (provability logic) 中 $\Box\phi$ 读作 “ ϕ 是可证的”

- $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

- $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ (Löb' formula)

定理 (Löb 定理)

若 $PA \vdash \text{Prov}_{PA}(\phi) \rightarrow \phi$, 则 $PA \vdash \phi$

模态逻辑的语言

定义 (模态语言类型)

一个 **模态语言类型** (modal similarity type) 是一个有序对 $\tau = (O, p)$, 其中 O 是模态词的集合, 非空。 $p : O \rightarrow \mathbb{N}$ 告诉我们每个模态词是几元的。

给定命题变元符号集 Φ 和模态语言类型 $\tau = (O, p)$, 唯一决定了模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg \phi \mid \phi \vee \psi \mid \Delta (\phi_1, \dots, \phi_{p(\Delta)})$$

其中 $p \in \Phi$ 、 $\Delta \in O$ 。用 $Form(\tau, \Phi)$ 表示该语言的公式集

模态逻辑的语言

例

两个 AI Agent A, B 协作。令 p 表示“会议在 305 室”。 A 已从可靠资料中得知 p , B 还不知道会议地点。

取两个一元模态词 $O = \{K_A, K_B\}$ 。尝试翻译：

- $K_A p \wedge \neg K_B p$

- $K_A \neg K_B p$

- $\neg K_B K_A p$

模态逻辑的语言

例

仍令 p 表示“会议在 305 室”。 B 知道 A 已查明会议地点，但自己不知道具体地点。比较：

- $K_B(K_A p \vee K_A \neg p)$: B 知道 A 知道是否 p
- $K_B K_A p$: B 知道 A 知道 p

前者可以与 $\neg K_B K_A p \wedge \neg K_B K_A \neg p$ 同时成立。

注意：在通常的知识解释下，后者蕴涵 $K_B p$ 。

模态逻辑的语言

例

仍令 p 表示“会议在 305 室”。 B 知道 A 已查明会议地点，但自己不知道具体地点。比较：

- $K_B(K_A p \vee K_A \neg p)$: B 知道 A 知道是否 p
- $K_B K_A p$: B 知道 A 知道 p

前者可以与 $\neg K_B K_A p \wedge \neg K_B K_A \neg p$ 同时成立。

注意：在通常的知识解释下，后者蕴涵 $K_B p$ 。

模态逻辑的语言

例

仍令 p 表示“会议在 305 室”。 B 知道 A 已查明会议地点，但自己不知道具体地点。比较：

- $K_B(K_A p \vee K_A \neg p)$: B 知道 A 知道是否 p
- $K_B K_A p$: B 知道 A 知道 p

前者可以与 $\neg K_B K_A p \wedge \neg K_B K_A \neg p$ 同时成立。

注意：在通常的知识解释下，后者蕴涵 $K_B p$ 。

模态逻辑的语言

例

基本时态逻辑：有两个一元模态词 $O = \{F, P\}$ 。 F 和 P 类似 $\diamond$ 算子。 $F\phi$ 常读作 “在未来某个时刻 ϕ (成立)”， $P\phi$ 读作 “在过去某个时刻 ϕ ”。通常定义 $G\phi := \neg F\neg\phi$ ，表示 “未来总是 ϕ ”；定于 $H\phi := \neg P\neg\phi$ ，表示 “过去一直 ϕ ”。

$$\blacksquare P\phi \rightarrow GP\phi$$

$$\blacksquare F\phi \rightarrow FF\phi$$

$$\blacksquare GFp \rightarrow FGp$$

(Mckinsey formula)

模态逻辑的语言

例

令 p 表示 “AI Agent 处于正常服务状态”。比较：

- GFp : 未来任何时刻之后，总还有正常服务的时刻
- FGp : 未来某个时刻之后，一直正常服务

离散时间上的反例：正常，故障，正常，故障，...

此时 GFp 为真， FGp 为假，故 $GFp \rightarrow FGp$ 为假。

模态逻辑的语言

例

时态逻辑可以加入更丰富的模态词，如二元模态词 $U(\phi, \psi)$ ，读作“ ψ 直到 ϕ ” (ψ until ϕ)，二元模态词 $S(\phi, \psi)$ ，读作“自从 ϕ ， ψ ” (ψ since ϕ)

$$\blacksquare F\phi \leftrightarrow U(\phi, \top), \quad P\phi \leftrightarrow S(\phi, \top)$$

模态逻辑的语言

定义 (代入)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$, 一个该语言的 **代入** (substitution) 是一个函数 $\sigma : \Phi \rightarrow Form(\tau, \Phi)$ 。一个代入可以被扩张到定义在全体公式集上的函数 $(\cdot)^\sigma : Form(\tau, \Phi) \rightarrow Form(\tau, \Phi)$:

模态逻辑的语言

$$\perp^\sigma = \perp$$

$$p^\sigma = \sigma(p)$$

$$(\neg\phi)^\sigma = \neg\phi^\sigma$$

$$(\phi \vee \psi)^\sigma = \phi^\sigma \vee \psi^\sigma$$

$$(\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n))^\sigma = \Delta(\phi_1^\sigma, \dots, \phi_n^\sigma)$$

(特别地) $(\Diamond\phi)^\sigma = \Diamond\phi^\sigma$

下期预告

模型与框架