逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

三段论与命题逻辑

回到判断三段论 有效性 的问题

- 一个以 φ 和 ψ 为前提 χ 为结论的三段论是有效的，或记为 $\varphi, \psi \vDash \chi$，当且仅当 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 不是可满足的
- 如果 χ 是全称命题，那么 $\neg\chi$ 是特称命题；反之亦然
- 判断一个三段论 $\varphi, \psi \vDash \chi$ 是否成立，等价于判断命题集 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 是否可满足

三段论与命题逻辑

- 任意三个全称命题（无论肯定还是否定）总是可满足的。为什么?
- 任意三个特称命题也是可满足的
- $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 只有当某个特称命题断言某个/某些单间有东西，而与其他命题断言某些单间没东西相矛盾时才会不可满足

三段论与命题逻辑

- 三段论中一个全称命题总是排除掉两个单间
- 一个特称命题总是断言两个单间中至少存在一个对象
- 注意，三段论 $\varphi, \psi \vDash \chi$ 中，每个命题述及 2 个单间并且与其他命题的都不同。因此 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中两个特称命题和一个全称命题总是可满足的
- 只有一个特称和两个全称命题的情况才会不可满足

回忆："结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等"

练习与讨论 7.1

考虑“四段论”，涉及四个谓词，并且总是由三个前提 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 一个结论 ψ 组成。给出关于四段论结构的进一步限制，并且证明：

- 有效的四段论中，$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中有且仅有一个特称命题
- 说明如果 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中只有一个特称命题且是可满足的，那么存在一个只有一个对象的情况满足它

四段论

- 我们规定四段论的四个命题总是关于 AB、BC、CD、AD 的组合。
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \psi$，当且仅当 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 不可满足。
- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中全是全称命题是可满足的
- 假设有一个特称命题 $\exists x(Ax \wedge Bx)$，此时 x 可能有 $CD, C\bar{D}, \bar{C}D, \bar{C}\bar{D}$ 四种情况。关于 BC、CD 或 AD 的命题中任意两个最多否掉 3 种情况, 所以必须全是全称命题才有可能否定掉所有情况。
- 例如这四个命题是 $\{\exists x\chi_1, \forall x\chi_2, \forall x\chi_3, \forall x\chi_4\}$

四段论

- 我们规定四段论的四个命题总是关于 AB、BC、CD、AD 的组合。
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \psi$，当且仅当 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 不可满足。
- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中全是全称命题是可满足的
- 假设有一个特称命题 $\exists x(Ax \wedge Bx)$，此时 x 可能有 $CD, C\bar{D}, \bar{C}D, \bar{C}\bar{D}$ 四种情况。关于 BC、CD 或 AD 的命题中任意两个最多否掉 3 种情况, 所以必须全是全称命题才有可能否定掉所有情况。
- 例如这四个命题是 $\{\exists x\chi_1, \forall x\chi_2, \forall x\chi_3, \forall x\chi_4\}$

四段论

- 我们规定四段论的四个命题总是关于 AB、BC、CD、AD 的组合。
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \psi$，当且仅当 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 不可满足。
- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中全是全称命题是可满足的
- 假设有一个特称命题 $\exists x(Ax \wedge Bx)$，此时 x 可能有 $CD, C\bar{D}, \bar{C}D, \bar{C}\bar{D}$ 四种情况。关于 BC、CD 或 AD 的命题中任意两个最多否掉 3 种情况，所以必须全是全称命题才有可能否定掉所有情况。
- 例如这四个命题是 $\{\exists x\chi_1, \forall x\chi_2, \forall x\chi_3, \forall x\chi_4\}$

四段论

- 我们规定四段论的四个命题总是关于 AB、BC、CD、AD 的组合。
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \psi$，当且仅当 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 不可满足。
- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中全是全称命题是可满足的
- 假设有一个特称命题 $\exists x(Ax \wedge Bx)$，此时 x 可能有 $CD, C\bar{D}, \bar{C}D, \bar{C}\bar{D}$ 四种情况。关于 BC、CD 或 AD 的命题中任意两个最多否掉 3 种情况，所以必须全是全称命题才有可能否定掉所有情况。
- 例如这四个命题是 $\{\exists x\chi_1, \forall x\chi_2, \forall x\chi_3, \forall x\chi_4\}$

四段论

- 我们规定四段论的四个命题总是关于 AB、BC、CD、AD 的组合。
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \psi$，当且仅当 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 不可满足。
- $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中全是全称命题是可满足的
- 假设有一个特称命题 $\exists x(Ax \wedge Bx)$，此时 x 可能有 $CD, C\bar{D}, \bar{C}D, \bar{C}\bar{D}$ 四种情况。关于 BC、CD 或 AD 的命题中任意两个最多否掉 3 种情况, 所以必须全是全称命题才有可能否定掉所有情况。
- 例如这四个命题是 $\{\exists x\chi_1, \forall x\chi_2, \forall x\chi_3, \forall x\chi_4\}$

练习与讨论 12.1

- 假设 x 不在 φ 中自由出现。证明：

  $\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$

- 证明：$\forall x\forall y\forall z(x = y \to y = z \to x = z)$

练习与讨论 4. 最后 *

一个含有 n 个命题符号的命题逻辑公式的真值表可以看作是一个 n 元函数。

例

假设 $\alpha = ((\neg p) \vee q) \to r$，定义 B_α 函数，满足对每个赋值 V 都有

$$B_\alpha(V(p), V(q), V(r)) = V(\alpha)$$

练习与讨论 4. 最后 *

1. 函数 B_α 的定义域是什么?
2. 是否存在不同的公式 α, β 使得 B_α 和 B_β 是相同的函数
3. 考虑至多含有 n 个命题符号的公式 α，有多少不同的 B_α?

练习与讨论 3.2

Consider the following statement

Nothing is too trivial to be ignored.

Given a thing x, what can we draw about x from the above statement? Can you translate it into a propositional logic formula.

为什么存在是二阶属性?