逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

自然演绎系统（幻灯片 12）

例

- $\exists x(Px \wedge Qx), \neg\exists x(Qx \wedge Rx) \vdash \exists x(Px \wedge \neg Rx)$
- $\forall x\exists y Rxy \vdash \forall x\exists y\exists z(Rxy \wedge Ryz)$

证明（来自幻灯片 05）

例 $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$

1. $\neg\varphi \to \neg\varphi$ 前一张幻灯片已证
2. $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$ (P3)
3. $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$ 分离 (2)、(1)
4. $((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi) \to \neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)$ (P1)

证明（来自幻灯片 05）

例 $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$

5. $\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)$ 分离 (4)、(3)
6. $\big(\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)\big) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$ (P2)
7. $(\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\neg\varphi \to \varphi$ 分离 (6)、(5)
8. $\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ (P1)
9. $\neg\neg\varphi \to \varphi$ 分离 (8)、(7)

证明（来自幻灯片 05）

下面这些也是定理（练习）

- $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
- $\varphi \to \neg\neg\varphi$
- $\neg\varphi \to \varphi \to \psi$
- $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$
- $\varphi \to \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$

练习与讨论 5.1

obligatio game 据传是起源于中世纪的逻辑游戏。老师们用这种游戏来测试学生的逻辑。游戏会进行若干轮。每一轮中老师会给出一个命题 φ_i，学生必须选择“接受”或“拒绝”该命题。如果接受该命题，则将 φ_i 放入已有命题的集合，否则将 $\neg\varphi_i$ 放入。如果放入后的命题集合矛盾了，则学生失败。如果既定轮数后得到命题集合仍然没有矛盾，学生通过测试。

练习与讨论 5.1

- 假设 obligatio game 游戏中的老师想好了出题顺序：(1) $q \vee \neg(p \vee r)$、(2) $p \rightarrow q$、(3) q
  - 如果你在第一轮中选择了“接受”，那么在第二第三轮中，你可以选择“接受”还是“拒绝”？
  - 如果你在第一轮选择了“拒绝”呢？
- 你能否在 obligatio game 中作为老师出些题难倒你的同学？

练习与讨论 5.2

- 利用 $\neg$ 和 $\wedge$ 表达所有可能的二元连接词
- (*) 证明 $\neg, \vee, \wedge$ 是表达力完全的

练习与讨论 10.2

证明，对任意公式 φ, ψ 有

$$\varphi \vDash \psi \text{，当且仅当 } \vDash \varphi \to \psi$$

只涉及有穷条公式时，我们常用 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ 作为 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$ 的简写

练习与讨论 11.1

- 如果 $\forall y \varphi_y^x$ 是 $\forall x \varphi$ 的变元易字，证明：
  - $\forall y \varphi_y^x \vdash \forall x \varphi$
  - $\vdash \forall y \varphi_y^x \to \forall x \varphi$
- 证明：$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$