

逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

前情提要

谓词逻辑的语义

- 谓词逻辑的语义为谓词逻辑语言中的每个符号赋予意义
- 量词的意义由模型的论域赋予
- 谓词和常元意义由模型中的解释函数赋予
- (自由) 变元的意义由变元赋值赋予
- 逻辑连接词的意义在塔斯基真定义中赋予

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义 (Tarski's definition of truth))

给定语言 \mathcal{L} , 给定 \mathcal{L} 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$, 给定变元赋值

$s : \mathcal{V} \rightarrow D$, 我们对公式的构造递归地定义 $\mathcal{M} \models_s \varphi$

■ 对原子公式 $Pt_1 \dots t_n$, $\mathcal{M} \models_s Pt_1 \dots t_n$, 当且仅当

$([t_1]_s^I, \dots, [t_n]_s^I) \in P^I$, 即 D 中元素 $[t_1]_s^I, \dots, [t_n]_s^I$ 之间有

P^I 关系

特别地, 对等词 = (一个特别的 2 元谓词),

$\mathcal{M} \models_s t_1 = t_2$, 当且仅当 $[t_1]_s^I = [t_2]_s^I$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义 (Tarski's definition of truth))

给定语言 \mathcal{L} , 给定 \mathcal{L} 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$, 给定变元赋值

$s : \mathcal{V} \rightarrow D$, 我们对公式的构造递归地定义 $\mathcal{M} \models_s \varphi$

■ 对原子公式 $Pt_1 \dots t_n$, $\mathcal{M} \models_s Pt_1 \dots t_n$, 当且仅当

$([t_1]_s^I, \dots, [t_n]_s^I) \in P^I$, 即 D 中元素 $[t_1]_s^I, \dots, [t_n]_s^I$ 之间有
 P^I 关系

特别地, 对等词 = (一个特别的 2 元谓词),

$\mathcal{M} \models_s t_1 = t_2$, 当且仅当 $[t_1]_s^I = [t_2]_s^I$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义 (Tarski's definition of truth))

■ 对公式的布尔组合：

- $\mathcal{M} \models_s \neg\varphi$, 当且仅当 并非 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \not\models_s \varphi$
- $\mathcal{M} \models_s \varphi \wedge \psi$, 当且仅当 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 且 $\mathcal{M} \models_s \psi$
- $\mathcal{M} \models_s \varphi \vee \psi$, 当且仅当 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \models_s \psi$
- $\mathcal{M} \models_s \varphi \rightarrow \psi$, 当且仅当 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 蕴含 $\mathcal{M} \models_s \psi$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义 (Tarski's definition of truth))

■ 对量词：

- $\mathcal{M} \models_s \forall x\varphi$, 当且仅当对任意 $d \in D$, 都有 $\mathcal{M} \models_{s[x:=d]} \varphi$
- $\mathcal{M} \models_s \exists x\varphi$, 当且仅当存在 $d \in D$, 使得 $\mathcal{M} \models_{s[x:=d]} \varphi$

谓词逻辑的语义

塔斯基真定义中对诸如合取式、析取式、蕴含式是否成立的定义可以理解为定义告诉我们如何基于下述真值表判断组合公式是否可满足

$\mathcal{M} \models_s \varphi$	$\mathcal{M} \models_s \psi$	$\mathcal{M} \models_s \varphi \rightarrow \psi$
Yes	Yes	Yes
Yes	No	No
No	Yes	Yes
No	No	Yes

谓词逻辑的语义

- 如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \models_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models_{s_2} \varphi$
- 实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个自由变元的赋值。所以，我们可用 $\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$
- 如果 φ 是语句，其真假与变元的赋值无关，因此可以写： $\mathcal{M} \models \varphi$

谓词逻辑的语义

定义 (有效性)

给定谓词逻辑语言 \mathcal{L}

- 我们称一个 \mathcal{L} 公式 φ 是 逻辑有效的 或 有效 的 (valid, 记作 $\models \varphi$)，当且仅当对任意 \mathcal{L} 的模型 \mathcal{M} ，任意 \mathcal{M} 上的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 。

谓词逻辑的语义

定义 (有效性)

给定谓词逻辑语言 \mathcal{L}

- 假设 Σ 是一个 \mathcal{L} 公式的集合, φ 是一个 \mathcal{L} 公式, 我们称 Σ 逻辑蕴含 (logcially implies) φ (记作 $\Sigma \models \varphi$), 当且仅当对任意 \mathcal{L} 的模型 \mathcal{M} , 任意 \mathcal{M} 上的变元赋值 s , 如果对每个 Σ 中的公式 ψ 都有 $\mathcal{M} \models_s \psi$, 那么 $\mathcal{M} \models_s \varphi$ 。

谓词逻辑的语义

如何判断 $\Sigma \models \varphi$ 是否成立？遗憾的是，在谓词逻辑中，不像命题逻辑和一元谓词逻辑，并没有一个机械的一般的方法。这并不是因为逻辑学家不够努力。相反，逻辑学家证明了不存在这样的方法。

但在很多具体情况下，我们还是可以判断的。

谓词逻辑的语义

例

- $\forall xPx \models \exists xPx$
- $\exists xPx \models \forall xPx$
- 我们可以给出一个具体的模型作为反例来证明 $\Sigma \not\models \varphi$
- 要论证 $\Sigma \models \varphi$ 往往需要给出从 Σ 到 φ 的 证明

谓词逻辑的语义

例

- $\forall xPx \models \exists xPx$
- $\exists xPx \models \forall xPx$
- 我们可以给出一个具体的模型作为反例来证明 $\Sigma \not\models \varphi$
- 要论证 $\Sigma \models \varphi$ 往往需要给出从 Σ 到 φ 的 证明

谓词逻辑的语义

例

- $\forall xPx \models \exists xPx$
- $\exists xPx \models \forall xPx$
- 我们可以给出一个具体的模型作为反例来证明 $\Sigma \not\models \varphi$
- 要论证 $\Sigma \models \varphi$ 往往需要给出从 Σ 到 φ 的 证明

形式证明

请回忆：在讲命题逻辑的时候，我们定义过一个 命题逻辑的公理系统。

- 公理：

$$(P1) \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$$

$$(P2) (\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$$

$$(P3) (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$$

- 演绎规则：如果 φ 和 $(\varphi \rightarrow \psi)$ 是定理，那么 ψ 也是定理
(分离规则 , modus ponens)

形式证明

- 要给出谓词逻辑的一个 公理系统，我们需要给出它的 公理集 和 演绎规则
- 由此，我们可以定义 $\Sigma \vdash \varphi$ ，即存在一个有穷的、以 φ 结尾的公式序列，其中的公式或是公理，或是 Σ 中公式，或是根据演绎规则由它之前的公式得到的。我们称这样的公式序列为一个 从 Σ 到 φ 的证明序列。

形式证明

公理集：

- 1 所有命题逻辑重言式都是公理
- 2 $\forall x\varphi \rightarrow \varphi_t^x$ 条件: t 若是变元 y , y 替换 x 在 φ_y^x 中的出现不能被 φ 中已有的 $\forall y$ 、 $\exists y$ 约束
- 3 $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
- 4 $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ 条件: x 不在 φ 中自由出现

形式证明

演绎规则：

- 1 分离规则：如果一个证明序列中已经有公式 φ 和 $\varphi \rightarrow \psi$, 那么在后面加上 ψ 还是证明序列
- 2 全称概括规则 (Universal Generalization)：如果存在从 Σ 到 φ 的证明序列，并且 x 不在 Σ 的任何公式中自由出现，那么在后面加上 $\forall x\varphi$ 还是证明序列

形式证明

如果语言中有 等词， 我们还可以补充两条 等词公理：

- $x = x$
- $x = y \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi'$ 条件: φ 是不含量词的公式, φ' 是把 φ 中任意个 x 的出现替换为 y 得到的公式

形式证明

- 类似命题逻辑，我们给出的是每一条都是“公理模式”，说的是“形如……的是公理”
- 谓词逻辑的公理集是能行可判定的，即存在一个计算机程序可以判断任意字符串是否是公理。
- 特别地，存在一个程序可以能行地把一个谓词逻辑公式还原为我们熟悉的命题逻辑公式并判断它是否为重言式

形式证明

- 所有的公理都是有效的
- 第 2 组公理 $\forall x\varphi \rightarrow \varphi_t^x$ 的条件是必要的
- 第 4 组公理 $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ 的条件也是必要的

例

- 考虑: $\forall x\exists yRxy \rightarrow \exists yRyy$
- 考虑: $Px \rightarrow \forall xPx$

形式证明

- 公理系统中没有出现符号 $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ 和 \exists , 它们可以被视为被定义的
- 根据全称概括规则, 如果 φ 是公理, 那么 $\vdash \forall x\varphi, \vdash \forall y\forall x\varphi, \vdash \forall z\forall y\forall x\varphi\dots\dots$
- 公理系统的 可靠性 : $\Sigma \vdash \varphi$ 蕴涵 $\Sigma \vDash \varphi$ 。特别地, 演绎规则保持逻辑蕴涵

形式证明

例

我们证明： $\vdash \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明： $\vdash \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明： $\vdash \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明： $\vdash \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$ (定义)

形式证明

例

假设 x 不再 φ 中出现，那么 $\varphi \rightarrow \forall x\psi \vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

- $\varphi \rightarrow \forall x\psi$ (前提)
- $\forall x\psi \rightarrow \psi$ (公理 2)
- $(\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (公理 1)
- $\varphi \rightarrow \psi$ (2 次分离规则)
- $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ (全称概况规则)

自然演绎系统

- 我们之前介绍的形式证明基于希尔伯特式的公理系统，即具有较多的公理和很少的规则。
 - Pros: 容易证明关于它的元定理
 - Cons: 很难用它来证明内定理
- 自然演绎系统 (natural deduction system) 是一种主要基于规则的推演系统

自然演绎系统规则

关于 \wedge :

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi \quad \psi} \wedge \text{引入}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \\ \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$$

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{消去 (左)} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge \text{消去 (右)}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$$

自然演绎系统规则

关于 \wedge :

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi \quad \psi} \wedge \text{引入}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \\ \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$$

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{消去 (左)} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge \text{消去 (右)}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$$

自然演绎系统规则

关于 \vee :

$$\frac{\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots}{\varphi \vee \psi} \vee \text{引入 (左)} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{引入 (右)} \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \chi}{\chi} \vee \text{消去}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi$$

$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \text{ and } \Gamma, \varphi \vdash \chi$
and $\Gamma, \psi \vdash \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \chi$

自然演绎系统规则

关于 \vee :

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi \vee \psi} \vee \text{引入 (左)} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{引入 (右)} \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \chi}{\chi} \vee \text{消去}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi$$

$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \text{ and } \Gamma, \varphi \vdash \chi$
 $\text{and } \Gamma, \psi \vdash \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \chi$

自然演绎系统规则

关于 \vee :

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi \vee \psi} \vee \text{引入 (左)} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{引入 (右)} \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \chi}{\chi} \vee \text{消去}$$

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi$$

$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \text{ and } \Gamma, \varphi \vdash \chi$
 $\text{and } \Gamma, \psi \vdash \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \chi$

自然演绎系统规则

关于 \rightarrow :

$$\frac{[\varphi] \quad \vdots \quad \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{引入}$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow \text{消去}$$

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

$$\begin{aligned} & \Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \\ & \Gamma \vdash \psi \end{aligned}$$

自然演绎系统规则

关于 \rightarrow :

$$\frac{[\varphi] \quad \vdots \quad \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{引入}$$

$$\frac{\vdots \quad \vdots \quad \varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow \text{消去}$$

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

$$\begin{aligned} & \Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \\ & \Gamma \vdash \psi \end{aligned}$$

自然演绎系统规则

关于 \neg :

$$\frac{[\varphi] \quad [\varphi] \\ \vdots \quad \vdots \\ \psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi} \neg \text{引入}$$

$$\frac{[\neg\varphi] \quad [\neg\varphi] \\ \vdots \quad \vdots \\ \psi \qquad \neg\psi}{\varphi} \neg \text{消去}$$

$$\begin{aligned} \Gamma, \varphi \vdash \psi \text{ and } \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi &\Rightarrow \\ \Gamma \vdash \neg\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \text{ and } \Gamma, \neg\varphi \vdash \\ \neg\psi &\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \end{aligned}$$

自然演绎系统规则

关于 \neg :

$$\frac{[\varphi] \quad [\varphi] \\ \vdots \quad \vdots \\ \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi} \neg \text{引入}$$

$$\frac{[\neg\varphi] \quad [\neg\varphi] \\ \vdots \quad \vdots \\ \psi \quad \neg\psi}{\varphi} \neg \text{消去}$$

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi \vdash \psi \text{ and } \Gamma, \varphi \vdash \neg\psi \Rightarrow \\ \Gamma \vdash \neg\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \text{ and } \Gamma, \neg\varphi \vdash \\ \neg\psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi\end{aligned}$$

自然演绎系统规则

关于 \forall :

$$\frac{\vdots \quad \varphi_t^x}{\forall x\varphi} \forall \text{引入}$$

$$\Gamma \vdash \varphi_t^x \Rightarrow \Gamma \vdash \forall x\varphi$$

前提是词项 t 不在 φ 中出现,
也不在这个 φ_t^x 的证明树中任
何未被“关闭”假设中出现, 即
不在 Γ 中出现。

自然演绎系统规则

关于 \forall :

$$\frac{\vdots}{\forall x \varphi} \forall \text{ 消去}$$

$$\Gamma \vdash \forall x \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi_t^x$$

自然演绎系统规则

关于 \exists :

$$\frac{\vdots}{\varphi_t^x} \exists \text{ 引入}$$

$$\Gamma \vdash \varphi_t^x \Rightarrow \Gamma \vdash \exists x \varphi$$

自然演绎系统规则

关于 \exists :

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\exists x\varphi \quad \psi} \exists \text{ 消去}$$

$\Gamma \vdash \exists\varphi$ 且 $\Gamma, \varphi_t^x \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$

前提是词项 t 不在 $\exists x\varphi$ 、 ψ 和这个 φ_t^x 的证明树中任何未被“关闭”的前提中出现 (也即不在 Γ 中出现)

自然演绎系统规则

关于 $=:$

$$\frac{[t = t]}{\vdash} = \text{引入}$$

⋮

$$\Gamma, t = t \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

自然演绎系统规则

关于 $=:$

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi_s^x \quad s = t} = \text{消去 (左)}$$

$$\Gamma \vdash \varphi_s^x \text{ 且 } \Gamma \vdash s = t \Rightarrow \varphi_t^x$$

$$\frac{\vdots \quad \vdots}{\varphi_t^x \quad s = t} = \text{消去 (右)}$$

$$\Gamma \vdash \varphi_t^x \text{ 且 } \Gamma \vdash s = t \Rightarrow \varphi_s^x$$

自然演绎系统

例

- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$
- $\forall x \exists y (Pxy \wedge \neg Qxy) \vdash \forall x \exists y Pxy$
- $\exists x (Px \wedge Qx), \neg \exists x (Qx \wedge Rx) \vdash \exists x (Px \wedge \neg Rx)$
- $\vdash \exists x \exists y x = y$

练习与讨论 10.1

下列是否成立?

- 1 $\models \exists xPx \vee \neg \exists xPx$
- 2 $\models \exists xPx \vee \forall x \neg Px$
- 3 $\models \exists x \exists y Rxy \rightarrow \exists x Rxx$
- 4 $\models \forall x \forall y Rxy \rightarrow \forall x Rxx$

练习与讨论 10.1

下列是否成立?

5 $\models \exists x \exists y Rxy \rightarrow \exists x \exists y Ryx$

6 $\models \forall x Rx x \rightarrow \forall x \exists y Rxy$

7 $\models \forall x Rxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy$

8 $\models \forall x \exists y Rxy \rightarrow \forall x Rxy$

练习与讨论 10.2

证明，对任意公式 φ, ψ 有

$$\varphi \models \psi , \text{ 当且仅当 } \models \varphi \rightarrow \psi$$

只涉及有穷条公式时，我们常用 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ 作为
 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$ 的简写

练习与讨论 10.3

下列是否成立?

- 1 $\forall xPx \models \exists xPx$
- 2 $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx), Rab \models Rba$
- 3 $\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx), Rab \models Raa$
- 4 $\forall x\forall y\forall z(Rxy \rightarrow Ryz \rightarrow Rxz), Rab, \neg Rac \models \neg Rbc$

练习与讨论 11.1

- 如果 $\forall y\varphi_y^x$ 是 $\forall x\varphi$ 的变元易字，证明：
 - $\forall y\varphi_y^x \vdash \forall x\varphi$
 - $\vdash \forall y\varphi_y^x \rightarrow \forall x\varphi$
- 证明： $\vdash \exists x\forall y\varphi \rightarrow \forall y\exists x\varphi$