逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

助教团队

- 高驰川：25210160027@m.fudan.edu.cn
- 李想（the master）：25210160028@m.fudan.edu.cn
- 余子康：25210160030@m.fudan.edu.cn

前情提要

再论用命题逻辑的方法判断三段论的有效性

- 例
- 注意：我们需要首先用“三段论推理 $\varphi, \psi \vDash \chi$ 是有效的，则 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中只有一个特称和两个全称命题”这条规则排除一些不有效的三段论。

前情提要

- 日常语言到谓词逻辑的翻译
  - 量词的论域
  - 逐级翻译与谓词逻辑公式的构造树
- 一元谓词逻辑
- 二元谓词逻辑与 图 （graph）
- 一元与二元谓词逻辑的混合

作业相关

- 现在可以自动转换命题逻辑形式化的 Lean 代码了
- 生成的 Lean 代码还需手动粘贴到Lean4 Live Playground运行

作业相关

关于提交谓词逻辑推理的约定

- 能以命题逻辑的形式提交尽量以命题逻辑提交
- 提交谓词逻辑推理时，Propositional 选择“否”
- Parameters 中输入首字母大写表示谓词，首字母小写表示常元

作业相关

关于提交谓词逻辑推理的约定

- 翻译部分要规定参数中列举的：
  - 谓词的翻译，如 Lxy 翻译为“x 大于 y”（也暗示了 L 是二元谓词）
  - 常元的翻译，如 a 翻译为“张三”
- Premise、Conclusion 中的公式凡涉及量词必须以“受限量词”的形式出现，例如：$\exists x(\varphi(x) \to \psi(x))$、$\forall x(\varphi(x) \to \exists y(\psi(y) \land \chi(x,y)))$（$\varphi.\psi, \chi$ 是元语言中指代公式的符号）

例

万圣节的 Salem

谓词逻辑的“情况”或“图像”

我们可以在二元谓词的基础上再增加一些符号

- 增加一个**等词**（等于号）

  $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx \vee x = y)$ 表示 R 是 **线性的** （linear）

- 增加一个一元谓词 P

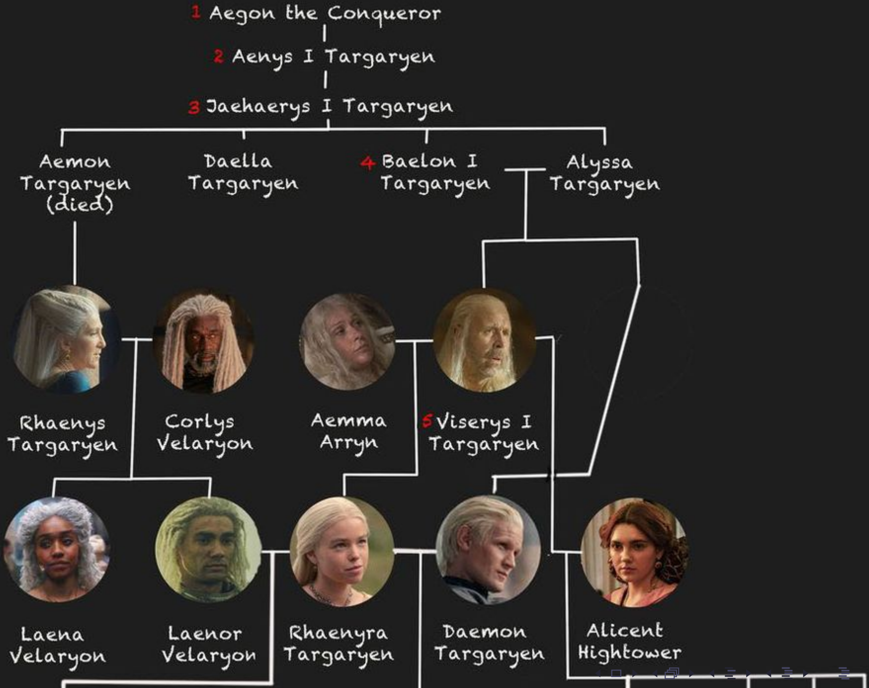
  $\forall x(Px \rightarrow \exists y(\neg Py \wedge Rxy))$

谓词逻辑的“情况”或“图像”

例 (家谱)

我们用 Pxy 表示 x 是 y 的父母，用 Fx 表示 x 是女性。尝试用谓词逻辑公式表示：

- x 是 y 的父亲
- Aemma and Viserys are brother and sisters
- Daemon is an uncle of Rhaenyra


1 Aegon the Conqueror
2 Aenys I Targaryen
3 Jaehaerys I Targaryen
Aemon Targaryen (died)
Daella Targaryen
4 Baelon I Targaryen
Alyssa Targaryen
Rhaenys Targaryen
Corlys Velaryon
Aemma Arryn
5 Viserys I Targaryen
Laena Velaryon
Laenor Velaryon
Rhaenyra Targaryen
Daemon Targaryen
Alicent Hightower

谓词逻辑的“情况”或“图像”

例 (自然数上的整除关系和素数)

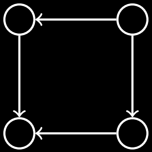
假设论域是自然数集，我们用 Dxy 表示 x 整除 y

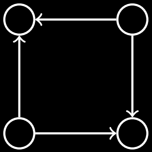
- 用 $\varphi_{=0}(x)$ 指代公式 $\forall z Dzx$
- 我们用 $\varphi_{=1}(x)$ 指代公式 $\forall z Dxz$
- 考虑公式 $\varphi_P(x) = \forall y(Dyx \to (\varphi_{=1}(y) \vee y = x))$

在这个意义上，自然数中的 0、1 和谓词“素数”是“整除”关系 可定义的

谓词逻辑的“情况”或“图像”

写出一个公式关于左边的图真，右边的图假





谓词逻辑的语法

类似命题逻辑的情况，我们要更正式的定义什么是一个 合式的 （well-formed） 谓词逻辑公式 。这部分内容被称作一个逻辑的 语法 （syntax），类似于日常语言的 grammar

谓词逻辑的语法

基本符号

- 变元 （variables）： $v_1, v_2, \ldots$
- 常元 （constants）： $c_1, c_2, \ldots$
- 谓词 （predicates）： $P_1, P_2, \ldots$

  并且我们要定好每个谓词的元数
- 量词 （quantifier）： $\exists$, $\forall$
- 命题连接词、括号

谓词逻辑的语法

约定

我们经常用下面的元语言符号（以及下下标的版本）来指代谓词逻辑语言中的基本符号

- 用 x, y, z 指代变元
- 用 a, b, c 指代常元
- 用 P, Q, R 指代谓词

此外，变元和常元都是 词项 （term），我们通常用 t 来指代词项（变元或常元）

谓词逻辑的语法

定义 (合式公式（well-formed formula）)

- 如果 P 是一个 n 元谓词符号，$t_1, \ldots, t_n$ 是词项，那么 $Pt_1 \ldots t_n$ 是一个 原子公式 （atomic formula)。所有原子公式都是 合式公式 （简称 公式 ）
- 如果 φ, ψ 是公式，那么 $(\neg\varphi)$、$(\varphi \to \psi)$、$(\varphi \land \psi)$、$(\varphi \lor \psi)$、$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ 是 公式
- 如果 φ 是公式，x 是变元，那么 $\exists x\varphi$ 和 $\forall x\varphi$ 是 公式
- 没有其他公式了

谓词逻辑的语法

例

假设 P, Q 是一元谓词，R 是二元谓词，S 是三元谓词。下列字符串是合式公式

- 括号省略规则仍然有效
- $(Px \wedge Qc)$
- $(Px \wedge Qy) \vee Rxz$
- $\forall xRxx$
- $\exists x(Rxy \wedge Sxyx)$

谓词逻辑的语法

例

假设 P, Q 是一元谓词，R 是二元谓词，S 是三元谓词。下列字符串是合式公式

- $(\neg Px)$括号省略规则仍然有效
- $(Px \wedge Qc)$
- $(Px \wedge Qy) \vee Rxz$
- $\forall xRxx$
- $\exists x(Rxy \wedge S\,xyx)$

例

假设 P, Q 是一元谓词，R 是二元谓词，S 是三元谓词。下列字符串是合式公式

- $(\neg Px)$括号省略规则仍然有效
- $(Px \wedge Qc)$
- $(Px \wedge Qy) \vee Rxz$
- $\forall xRxx$
- $\exists x(Rxy \wedge Sxyx)$

谓词逻辑的语法

例

假设 P, Q 是一元谓词，R 是二元谓词，S 是三元谓词。下列字符串是合式公式

- $(\neg Px)$括号省略规则仍然有效
- $(Px \wedge Qc)$
- $(Px \wedge Qy) \vee Rxz$
- $\forall x Rxx$
- $\exists x(Rxy \wedge Sxyx)$

谓词逻辑的语法

例

假设 P, Q 是一元谓词，R 是二元谓词，S 是三元谓词。下列字符串是合式公式

- $(\neg Px)$括号省略规则仍然有效
- $(Px \wedge Qc)$
- $(Px \wedge Qy) \vee Rxz$
- $\forall x Rxx$
- $\exists x(Rxy \wedge Sxyx)$

谓词逻辑的语法

例

假设 P, Q 是一元谓词，R 是二元谓词，S 是三元谓词。下列字符串是合式公式

- $(\neg Px)$括号省略规则仍然有效
- $(Px \wedge Qc)$
- $(Px \wedge Qy) \vee Rxz$
- $\forall xRxx$
- $\exists x(Rxy \wedge Sxyx)$

谓词逻辑的语法

更多的语法事项

- 变元和常元承担的语法功能有什么区别?
- 考虑公式：$Px \wedge \forall x(Qx \to Rxy)$

  我们说变元 x 在上面的公式中有不同的 **出现** （occurrence）

  直观上，上式中 x 不同的出现有不同的语义，也应该有不同的语法角色
- 同理，我们可以指向任何字符串在某个公式中不同的出现

谓词逻辑的语法

更多的语法事项

- 变元和常元承担的语法功能有什么区别?
- 考虑公式：$Px \ \wedge \forall x(Qx \to Rxy)$

  我们说变元 x 在上面的公式中有不同的 出现 （occurrence)

  直观上，上式中 x 不同的出现有不同的语义，也应该有不同的语法角色
- 同理，我们可以指向任何字符串在某个公式中不同的出现

谓词逻辑的语法

更多的语法事项

- 变元和常元承担的语法功能有什么区别?
- 考虑公式：$Px \wedge \forall x(Qx \to Rxy)$

  我们说变元 x 在上面的公式中有不同的 出现 （occurrence）

  直观上，上式中 x 不同的出现有不同的语义，也应该有不同的语法角色
- 同理，我们可以指向任何字符串在某个公式中不同的出现

谓词逻辑的语法

更多的语法事项

- 变元和常元承担的语法功能有什么区别?
- 考虑公式：$Px \wedge \forall x(Qx \to Rxy)$

  我们说变元 x 在上面的公式中有不同的 **出现** （occurrence）

  直观上，上式中 x 不同的出现有不同的语义，也应该有不同的语法角色
- 同理，我们可以指向任何字符串在某个公式中不同的出现

谓词逻辑的语法

更多的语法事项

- 变元和常元承担的语法功能有什么区别?
- 考虑公式：$Px \wedge \forall x(Qx \to Rxy)$

  我们说变元 x 在上面的公式中有不同的 出现 （occurrence）

  直观上，上式中 x 不同的出现有不同的语义，也应该有不同的语法角色
- 同理，我们可以指向任何字符串在某个公式中不同的出现

定义 (变元的约束出现与自由出现)

- 我们称公式 $\forall x\varphi$ 中的这个 φ 是这个 $\forall x$ 的 辖域 (scope)。在某个 $\forall x$ 辖域中的每个 自由的 x 都是 (被这个 $\forall x$) 约束的出现 (bounded occurrence)
- $\exists x\varphi$ 类似
- 一个变元 x 的出现不是约束地出现也不是某个 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的出现的话，就是 自由的出现 (free occurrence)

定义 (变元的约束出现与自由出现)

- 我们称公式 $\forall x\varphi$ 中的这个 φ 是这个 $\forall x$ 的 辖域 (scope)。在某个 $\forall x$ 辖域中的每个 自由的 x 都是 (被这个 $\forall x$) 约束的出现 (bounded occurrence)
- $\exists x\varphi$ 类似
- 一个变元 x 的出现不是约束地出现也不是某个 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的出现的话，就是 自由的出现 (free occurrence)

定义 (变元的约束出现与自由出现)

- 我们称（子）公式 $\forall x\varphi$ 中的这个 φ 是这个 $\forall x$ 的 辖域 （scope）。在某个 $\forall x$ 辖域中的每个 自由的 x 都是 (被这个 $\forall x$) 约束的出现 （bounded occurrence）
- $\exists x\varphi$ 类似
- 一个变元 x 的出现不是约束地出现也不是某个 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的出现的话，就是 自由的出现 （free occurrence）

定义 (变元的约束出现与自由出现)

- 我们称（子）公式 $\forall x\varphi$ 中的这个 φ 是这个 $\forall x$ 的 辖域 （scope)。在某个 $\forall x$ 辖域中的每个 自由的 x 都是(被这个 $\forall x$) 约束的出现 （bounded occurrence)
- $\exists x\varphi$ 类似
- 一个变元 x 的出现不是约束地出现也不是某个 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的出现的话，就是 自由的出现 （free occurrence)

谓词逻辑的语法

定义 (变元的约束出现与自由出现)

- 我们称（子）公式 $\forall x\varphi$ 中的这个 φ 是这个 $\forall x$ 的 辖域 （scope）。在某个 $\forall x$ 辖域中的每个 自由的 x 都是 (被这个 $\forall x$) 约束的出现 （bounded occurrence）
- $\exists x\varphi$ 类似
- 一个变元 x 的出现不是约束地出现也不是某个 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的出现的话，就是 自由的出现 （free occurrence）

谓词逻辑的语法

例

- Rxy 中的 x, y 都是自由的出现
- $\exists xRxy$ 中的 $\exists x$ 的辖域是 Rxy，x 在 $\exists xRxy$ 中是（被那个 $\exists x$）约束的出现；x 在子公式 Rxy 中的出现是自由的出现
- $Px \rightarrow \exists xRxy$
- $\forall x \forall y(Px \rightarrow \exists xRxy)$

例

- Rxy 中的 x, y 都是自由的出现
- $\exists xRxy$ 中的 $\exists x$ 的辖域是 Rxy，x 在 $\exists xRxy$ 中是（被那个 $\exists x$）约束的出现；x 在子公式 Rxy 中的出现是自由的出现
- $Px \to \exists xRxy$
- $\forall x \forall y(Px \to \exists xRxy)$

谓词逻辑的语法

例

- Rxy 中的 x, y 都是自由的出现
- $\exists x Rxy$ 中的 $\exists x$ 的辖域是 Rxy，x 在 $\exists x Rxy$ 中是（被那个 $\exists x$）约束的出现；x 在子公式 Rxy 中的出现是自由的出现
- $Px \rightarrow \exists x Rxy$
- $\forall x \forall y (Px \rightarrow \exists x Rxy)$

谓词逻辑的语法

例

- Rxy 中的 x, y 都是自由的出现
- $\exists xRxy$ 中的 $\exists x$ 的辖域是 Rxy，x 在 $\exists xRxy$ 中是（被那个 $\exists x$）约束的出现；x 在子公式 Rxy 中的出现是自由的出现
- $Px \to \exists xRxy$
- $\forall x\forall y(Px \to \exists xRxy)$

谓词逻辑的语法

记法

- 如果一个公式中至少包含一个变元的自由出现，我们称这个公式是一个 开 （open）公式
- 否则，我们称这个公式为 闭 （closed）公式。通常闭公式又被称作 语句 （sentence）

谓词逻辑的语法

例

- $\forall x(Px \to Rxy)$
- $\exists x(Px \wedge \exists xRxx)$
- $\forall xRxc$

谓词逻辑的语法

有时候某个 $\forall x$ 的辖域中没有自由的 x，此时我们称这个 $\forall x$ 是一个 空洞的 （vacuous）的量词（的出现）

例

- $\forall x \exists y Rxx$
- $\forall x \exists x Rxx$
- $\forall x \exists y Ryy$
- $\forall x(Px \rightarrow \exists x Qx)$

有时候某个 $\forall x$ 的辖域中没有自由的 x，此时我们称这个 $\forall x$ 是一个 空洞的 （vacuous）的量词（的出现）

例

- $\forall x \exists y Rxx$
- $\forall x \exists x Rxx$
- $\forall x \exists y Ryy$
- $\forall x (Px \to \exists x Qx)$

谓词逻辑的语法

定义 (代入)

我们定义对字符串的 代入 （substitution）操作。首先考虑词项：

- $c_t^c = t$
- 若 $t_1 \neq c$，则 $c_{t_2}^{t_1} = c$
- $x_t^x = t$
- 若 $t_1 \neq x$，$x_{t_2}^{t_1} = x$

谓词逻辑的语法

接下来，我们定义对公式的代入。直观上，我们希望 φ^x_t 表示把 φ 中所有 x 的自由出现替换为词项 t。下面给出严格的递归定义

定义 (代入)

- 对原子公式，$(Pt_1 \ldots t_n)^x_t = P(t_1)^x_t \ldots (t_n)^x_t$
- $(\neg\varphi)^x_t = (\neg\varphi^x_t)$
- $(\varphi * \psi)^x_t = (\varphi^x_t * \psi^x_t)$ （$*$ 可以是 $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$）
- $(Qy\varphi)^x_t = \begin{cases} Qy\varphi, & \text{如果 } x = y, \\ Qy\varphi^x_t, & \text{如果 } x \neq y \end{cases}$ (Q 可以是 $\forall$ 或 $\exists$)

谓词逻辑的语法

例

- $(Rxx)^x_c = Rcc$
- $(Rxc)^c_x = Rxx$
- $(\forall y Rxy)^x_z = \forall y Rzy$

谓词逻辑的语法

- 直观上，$\forall xPx$ 与 $\forall yPy$ 的意思是一样的
- 考虑 $(\forall yRxy)^x_y = \forall yRyy$，它与 $(\forall yRxy)^x_z = \forall yRzy$ 的意思有明显的不同。造成这种不同的原因似乎是变元选得不巧
- $\forall yRxy$ 与 $\forall zRxz$ 意思相同，但 $(\forall zRxz)^x_y$ 就没问题

谓词逻辑的语法

- 直观上，$\forall x Px$ 与 $\forall y Py$ 的意思是一样的
- 考虑 $(\forall y Rxy)^x_y = \forall y Ryy$，它与 $(\forall y Rxy)^x_z = \forall y Rzy$ 的意思有明显的不同。造成这种不同的原因似乎是变元选得不巧
- $\forall y Rxy$ 与 $\forall z Rxz$ 意思相同，但 $(\forall z Rxz)^x_y$ 就没问题

谓词逻辑的语法

- 直观上，$\forall x Px$ 与 $\forall y Py$ 的意思是一样的
- 考虑 $(\forall y Rxy)^x_y = \forall y Ryy$，它与 $(\forall y Rxy)^x_z = \forall y Rzy$ 的意思有明显的不同。造成这种不同的原因似乎是变元选得不巧
- $\forall y Rxy$ 与 $\forall z Rxz$ 意思相同，但 $(\forall z Rxz)^x_y$ 就没问题

谓词逻辑的语法

定义 (变元易字)

假设 z 不在公式 φ 中出现，我们称 $\forall z \varphi_z^x$ 是 $\forall x \varphi$ 的一个 (约束) 变元易字 (alphabetic variant)。$\exists$ 类似。

如果 φ' 是 φ 通过若干次子公式的变元易字得到的，我们也称 φ' 是 φ 的 变元易字

谓词逻辑的语法

例

- $\forall z Rxz$ 是 $\forall y Rxy$ 的变元易字
- $\forall x(Px \to \exists x Rxx)$ 有变元易字 $\forall y(Py \to \exists x Rxx)$ 或 $\forall x(Px \to \exists y Ryy)$
- $\forall y(Py \to \exists y Ryy)$ 是 $\forall x(Px \to \exists y Rxy)$ 的变元易字吗?

谓词逻辑的语法

例

- $\forall zRxz$ 是 $\forall yRxy$ 的变元易字
- $\forall x(Px \to \exists xRxx)$ 有变元易字 $\forall y(Py \to \exists xRxx)$ 或 $\forall x(Px \to \exists yRyy)$
- $\forall y(Py \to \exists yRyy)$ 是 $\forall x(Px \to \exists yRxy)$ 的变元易字吗?

谓词逻辑的语法

例

- $\forall zRxz$ 是 $\forall yRxy$ 的变元易字
- $\forall x(Px \to \exists xRxx)$ 有变元易字 $\forall y(Py \to \exists xRxx)$ 或 $\forall x(Px \to \exists yRyy)$
- $\forall y(Py \to \exists yRyy)$ 是 $\forall x(Px \to \exists yRxy)$ 的变元易字吗?

练习与讨论 9.1

- 下面公式中 x 的哪些出现是约束的出现?

  $\exists x(Rxy \vee Sxyz) \wedge Px$

- 下面哪个量词的出现约束了哪个变元的出现

  $\forall x(Px \rightarrow \exists x Rxx)$

练习与讨论 9.2

下面哪些公式是语句?

- $\forall x Px \vee \forall x Qx$
- $Px \vee \forall x Qx$
- $\forall x(Px \rightarrow Rcx)$
- $\forall x(Px \rightarrow \exists y Rxy)$

练习与讨论 9.3

- “变元易字”关系是对称的吗？如果 φ 是 ψ 的变元易字，那么 ψ 一定是 φ 的变元易字吗？
- “变元易字”关系是传递的吗？

练习与讨论 9.4

我们用 **量词深度** （quantifier depth）表示量词嵌套的层数。例如原子公式的 Px 量词深度为 0，$\forall xRxy$ 的量词深度为 1，$\exists y(Py \wedge \forall xRxy)$ 的量词深度为 2。尝试给出一个谓词逻辑公式量词深度的递归定义。