逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

前情提要

- 三段论有效性的一种简化判定方法
  - 只需考虑 $\{\varphi, \psi, \neg\xi\}$ 中有一个特称和俩全称命题的情况
  - $\{\varphi, \psi, \neg\xi\}$ 若可满足，存在论域中至多有一个对象的情况满足它
  - 把三段论转化为命题逻辑 例

前情提要

- 谓词逻辑
  - （n 元）谓词
  - 变元与常元
  - （存在与全称）量词

自然语言到形式语言、机器语言的翻译和自然语言到自然语言的翻译类似，没有标准的程序

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

谓词逻辑

- 注意，上面的例子中尽管出现了很多变元，但整个公式的意思是确定的（不依赖于 x, y 具体指什么）
- 尝试把 L 解释成自然数的 $>$，把 $\forall x$ 理解成“所有自然数”，把 $\exists x$ 理解成“存在自然数”，理解成“所有/存在实数”呢？
- 为了更精确的翻译，我们总是需要约定量词的 论域 （domain of discourse）

谓词逻辑

- 注意，上面的例子中尽管出现了很多变元，但整个公式的意思是确定的（不依赖于 x, y 具体指什么）
- 尝试把 L 解释成自然数的 $>$，把 $\forall x$ 理解成"所有自然数"，把 $\exists x$ 理解成"存在自然数"，理解成"所有/存在实数"呢？
- 为了更精确的翻译，我们总是需要约定量词的 **论域** （domain of discourse）

谓词逻辑

- 注意，上面的例子中尽管出现了很多变元，但整个公式的意思是确定的（不依赖于 x, y 具体指什么）
- 尝试把 L 解释成自然数的 $>$，把 $\forall x$ 理解成"所有自然数"，把 $\exists x$ 理解成"存在自然数"，理解成"所有/存在实数"呢？
- 为了更精确的翻译，我们总是需要约定量词的 论域（domain of discourse）

谓词逻辑与自然语言

翻译三段论

- 所有 A 是 B：$\forall x(Ax \to Bx)$
- 所有 A 不是 B：$\forall x(Ax \to \neg Bx)$
- 有的 A 是 B：$\exists x(Ax \wedge Bx)$
- 有的 A 不是 B：$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

谓词逻辑与自然语言

更多的谓词

每个男孩都爱一个女孩

- 每个男孩都有“爱一个女孩”这个性质：

  $\forall x(Bx \to \varphi(x))$

- $\varphi(x)$ 表示“x 爱一个女孩”： $\exists y(Gy \land Lxy)$

- $\forall x(Bx \to \exists y(Gx \land Lxy))$

谓词逻辑与自然语言

更多的谓词

每个男孩都爱一个女孩

- 每个男孩都有“爱一个女孩”这个性质：

  $\forall x(Bx \to \varphi(x))$

- $\varphi(x)$ 表示“x 爱一个女孩”： $\exists y(Gy \land Lxy)$
- $\forall x(Bx \to \exists y(Gx \land Lxy))$

谓词逻辑与自然语言

更多的谓词

每个男孩都爱一个女孩

- 每个男孩都有“爱一个女孩”这个性质：

  $\forall x(Bx \to \varphi(x))$

- $\varphi(x)$ 表示“x 爱一个女孩”： $\exists y(Gy \wedge Lxy)$

- $\forall x(Bx \to \exists y(Gx \wedge Lxy))$

谓词逻辑与自然语言

更多的谓词

每个男孩都爱一个女孩

- 每个男孩都有“爱一个女孩”这个性质：

  $\forall x(Bx \to \varphi(x))$

- $\varphi(x)$ 表示“x 爱一个女孩”： $\exists y(Gy \wedge Lxy)$

- $\forall x(Bx \to \exists y(Gx \wedge Lxy))$

谓词逻辑与自然语言

更多的谓词

每个男孩都爱一个女孩

- 每个男孩都有“爱一个女孩”这个性质：
  $\forall x(Bx \to \varphi(x))$
- $\varphi(x)$ 表示“x 爱一个女孩”：　$\exists y(Gy \wedge Lxy)$
- $\forall x(Bx \to \exists y(Gx \wedge Lxy))$

谓词逻辑与自然语言

更多的谓词

每个男孩都爱一个女孩

- 每个男孩都有“爱一个女孩”这个性质：

  $\forall x(Bx \to \varphi(x))$

- $\varphi(x)$ 表示“x 爱一个女孩”：　$\exists y(Gy \wedge Lxy)$

- $\forall x(Bx \to \exists y(Gx \wedge Lxy))$

谓词逻辑与自然语言

类似命题逻辑中的复合命题，复杂的谓词逻辑公式也可以分析其**构造树**。对复杂表达式的翻译也可以参考构造树

$$\forall x(Bx \rightarrow \exists y(Gx \wedge Lxy))$$

$$Bx \rightarrow \exists y(Gx \wedge Lxy)$$

$$Bx \qquad \exists y(Gx \wedge Lxy)$$

$$Gx \wedge Lxy$$

$$Gx \qquad Lxy$$

谓词逻辑与自然语言

例

No girl who loves a boy is not loved by some boy

谓词逻辑与自然语言

例

没有爱某个男孩的女孩不被某个男孩爱

谓词逻辑与自然语言

更多的量词跌置

例

You can fool some people all the time,

and you can fool all the people some time,

but you cannot fool all the people all the time.

谓词逻辑与自然语言

更多的量词跌置

例 (函数 f 在 x 上是连续的)

对任意正实数 ε，存在实数 δ，对任意满足 $|x-y|<\delta$ 的实数 y，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

接下来我们根据直观来观察一些谓词逻辑的 **推理**

一元谓词逻辑

一元谓词逻辑（Monadic Predicate Logic）是谓词逻辑的一个片段（fragment），其中只包含一元谓词（不包含常元、函数符号、二元或更多元谓词符号、等词等）

- 三段论可以翻译到一元谓词逻辑的语言中
- 我们可以用文恩图来帮助判断一元谓词逻辑推理是否有效

一元谓词逻辑

考虑下面的语句

- 有的 A 不是 B
- 并非所有 A 都是 B
- 所有 A 都不是 B
- 没有 A 是 B

一元谓词逻辑

考虑下面的语句

- $\exists x(Ax \land \neg Bx)$
- 并非所有 A 都是 B
- 所有 A 都不是 B
- 没有 A 是 B

一元谓词逻辑

考虑下面的语句

- $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$
- $\neg \forall x(Ax \to Bx)$
- 所有 A 都不是 B
- 没有 A 是 B

一元谓词逻辑

考虑下面的语句

- $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$
- $\neg\forall x(Ax \to Bx)$
- $\forall x(Ax \to \neg Bx)$
- 没有 A 是 B

一元谓词逻辑

考虑下面的语句

- $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$
- $\neg\forall x(Ax \rightarrow Bx)$
- $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$
- $\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$

一元谓词逻辑

以上观察提示我们下面的等价下

- $\neg\forall x\varphi$ 等价于 $\exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi$ 等价于 $\forall x\neg\varphi$

因而，也有

- $\forall x\varphi$ 等价于 $\neg\exists x\neg\varphi$
- $\exists x\varphi$ 等价于 $\neg\forall x\neg\varphi$

一元谓词逻辑

一元谓词逻辑比三段论“更多”

- $\forall x(Ax \wedge Bx)$ 与 $\forall xAx \wedge \forall xBx$ 等价

  $\forall$ 可对 $\wedge$ 分配
- $\forall x(Gx \vee Bx)$ 与 $\forall xGx \vee \forall xBx$ 等价吗?

  $\forall$ 不对 $\vee$ 分配

$\exists$ 与 $\wedge$ 和 $\vee$ 呢?

一元谓词逻辑

一元谓词逻辑比三段论“更多”

- $\forall x(Ax \wedge Bx)$ 与 $\forall xAx \wedge \forall xBx$ 等价

  $\forall$ 可对 $\wedge$ 分配

- $\forall x(Gx \vee Bx)$ 与 $\forall xGx \vee \forall xBx$ 等价吗?

  $\forall$ 不对 $\vee$ 分配

$\exists$ 与 $\wedge$ 和 $\vee$ 呢?

一元谓词逻辑

一元谓词逻辑比三段论“更多”

- $\forall x(Ax \wedge Bx)$ 与 $\forall xAx \wedge \forall xBx$ 等价

  $\forall$ 可对 $\wedge$ 分配

- $\forall x(Gx \vee Bx)$ 与 $\forall xGx \vee \forall xBx$ 等价吗?

  $\forall$ 不对 $\vee$ 分配

$\exists$ 与 $\wedge$ 和 $\vee$ 呢?

一元谓词逻辑

一元谓词逻辑比三段论“更多”

- $\forall x(Ax \wedge Bx)$ 与 $\forall xAx \wedge \forall xBx$ 等价

  $\forall$ 可对 $\wedge$ 分配
- $\forall x(Gx \vee Bx)$ 与 $\forall xGx \vee \forall xBx$ 等价吗?

  $\forall$ 不对 $\vee$ 分配

$\exists$ 与 $\wedge$ 和 $\vee$ 呢?

一元谓词逻辑

一元谓词逻辑比三段论“更多”

- $\forall x(Ax \wedge Bx)$ 与 $\forall xAx \wedge \forall xBx$ 等价

  $\forall$ 可对 $\wedge$ 分配

- $\forall x(Gx \vee Bx)$ 与 $\forall xGx \vee \forall xBx$ 等价吗?

  $\forall$ 不对 $\vee$ 分配

$\exists$ 与 $\wedge$ 和 $\vee$ 呢?

涉及多元谓词的推理

例

所有驴是动物，所有驴头是动物的头

$$\frac{\forall x(Dx \to Ax)}{\forall y(Hy \land \exists x(Dx \land Pxy) \to \exists z(Az \land Pzy \land Hy))}$$

涉及多元谓词的推理

例

所有驴是动物，所有驴头是动物的头

$$\frac{\forall x(Dx \to Ax)}{\forall y(Hy \land \exists x(Dx \land Pxy) \to \exists z(Az \land Pzy \land Hy))}$$

涉及多元谓词的推理

下面公式是有效的

- $\forall x \forall y \varphi \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$
- $\exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$

其他量词叠置的情况呢?

涉及多元谓词的推理

下面公式是有效的

- $\forall x \forall y \varphi \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$
- $\exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$

其他量词叠置的情况呢?

谓词逻辑的“情况”或“图像”

- 与命题一样，谓词逻辑的 有效性 概念依赖于我们对所涉及的 情况 的理解
- 谓词逻辑的表达力更强，其所涉及的情况可以很复杂
- 谓词逻辑的表达力又有限，满足一句话的情况会很多
- 我们需要更抽象的“情况”

谓词逻辑的“情况”或“图像”

- 一元谓词逻辑的情况可以抽象为文恩图
- 如果一组一元谓词逻辑公式中只出现 n 个谓词，其对应的情况可以用含有 2^n 个单间的文恩图来表示
- 一元谓词逻辑公式有效性是可判定的

谓词逻辑的“情况”或“图像”

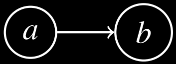
- 人们经常用图片来表示一个具体情况
- 只含有一个二元谓词符号的谓词逻辑公式（集）对应的情况可以用下面定义的数学结构来表示

定义 (图)

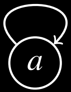
图（graph）或 有向图（directed graph）由一组 节点（vertex, point, node）和节点之间的 箭头（arrow）组成

谓词逻辑的“情况”或“图像”

图:



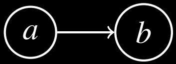
Rab



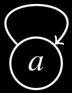
Raa

谓词逻辑的“情况”或“图像”

图:



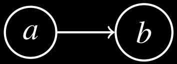
Rab



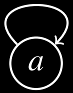
Raa

谓词逻辑的“情况”或“图像”

图:

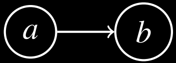


Rab



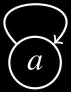
Raa

谓词逻辑的“情况”或“图像”



$\exists x \exists y Rxy$

$\neg \forall x \exists y Rxy$

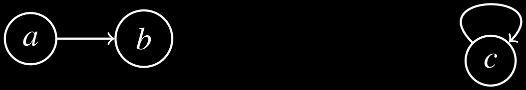


$\exists x Rxx$

$\forall x \exists y Rxy$

谓词逻辑的“情况”或“图像”

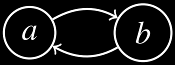
把下面看作一整个图

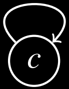


$$\exists x \exists y Rxy,\ \exists x Rxx,\ \forall x \exists y Rxy$$

谓词逻辑的“情况”或“图像”

加一根箭头



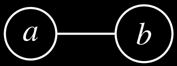


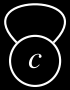
$\forall x(Rxy \rightarrow Ryx)$　　对称性（symmetry）

我们把满足对称性的图称作 无向图 （undirected graph）

谓词逻辑的“情况”或“图像”

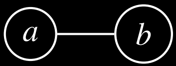
我们可以简化无向图的作图

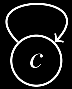




谓词逻辑的“情况”或“图像”

我们可以简化无向图的作图

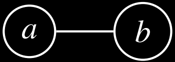




谓词逻辑的“情况”或“图像”

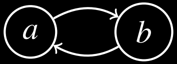
- 我们称满足 $\forall x Rxx$ 的图有 **自反性**（reflexivity）
- 满足 $\forall x \forall y \forall z (Rxy \to Ryz \to Rxz)$ 的图有 **传递性**（transitivity）
- 下面的关系有无自反性、传递性、对称性？人类论域下的“……的父母”、“……的祖先”、“……的兄弟姐妹”

谓词逻辑的“情况”或“图像”



是传递的吗？

谓词逻辑的“情况”或“图像”



是传递的吗？

谓词逻辑的“情况”或“图像”

我们可以在二元谓词的基础上再增加一些符号

- 增加一个**等词**（等于号）

  $\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx \vee x = y)$ 表示 R 是 **线性的** （linear）

- 增加一个一元谓词 P

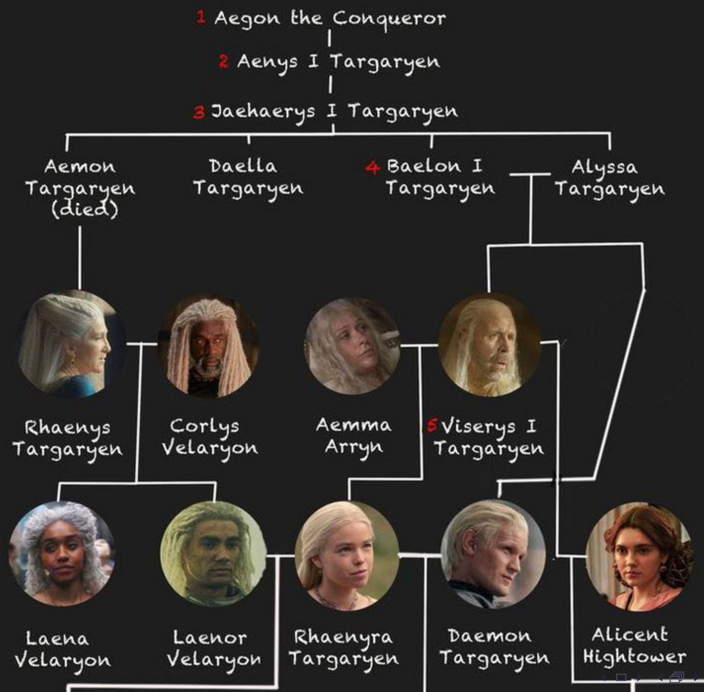
  $\forall x (Px \to \exists y (\neg Py \wedge Rxy))$

谓词逻辑的“情况”或“图像”

例 (家谱)

我们用 Pxy 表示 x 是 y 的父母，用 Fx 表示 x 是女性。尝试用谓词逻辑公式表示：

- x 是 y 的父亲
- Aemma and Viserys are brother and sisters
- Daemon is an uncle of Rhaenyra


1 Aegon the Conqueror
2 Aenys I Targaryen
3 Jaehaerys I Targaryen
Aemon Targaryen (died)
Daella Targaryen
4 Baelon I Targaryen
Alyssa Targaryen
Rhaenys Targaryen
Corlys Velaryon
Aemma Arryn
5 Viserys I Targaryen
Laena Velaryon
Laenor Velaryon
Rhaenyra Targaryen
Daemon Targaryen
Alicent Hightower

谓词逻辑的“情况”或“图像”

例 (自然数上的整除关系和素数)

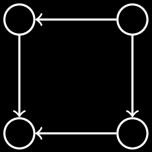
假设论域是自然数集，我们用 Dxy 表示 x 整除 y

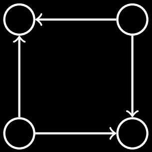
- 用 $\varphi_{=0}(x)$ 指代公式 $\forall z Dzx$
- 我们用 $\varphi_{=1}(x)$ 指代公式 $\forall z Dxz$
- 考虑公式 $\varphi_P(x) = \forall y(Dyx \to (\varphi_{=1}(y) \vee y = x))$

在这个意义上，自然数中的 0、1 和谓词“素数”是“整除”关系 可定义的

谓词逻辑的“情况”或“图像”

写出一个公式关于左边的图真，右边的图假





作业相关

- 现在可以自动转换命题逻辑形式化的 Lean 代码了
- 生成的 Lean 代码还需手动粘贴到Lean4 Live Playground运行

作业相关

关于提交谓词逻辑推理的约定

- 能以命题逻辑的形式提交尽量以命题逻辑提交
- 提交谓词逻辑推理时，Propositional 选择“否”
- Parameters 中输入首字母大写表示谓词，首字母小写表示常元
- 翻译部分要规定参数中列举的：谓词的翻译，如 Lxy 翻译为“x 大于 y”(也暗示了 L 是二元谓词)，以及常元的翻译，如 a 翻译为“张三”

练习与讨论 8.1

假设论域是《三体》世界中的人物，我们用 l 指代罗辑，z 指代庄颜，L 表示关系“爱”，R 表示关系“尊敬”，翻译下面的语句

- 罗辑不被所有人爱
- 罗辑和庄颜彼此尊敬
- 庄颜尊敬每个爱罗辑的人

练习与讨论 8.2

自定论域和符号的指代，翻译下面的语句

- 会叫的狗就不咬人
- 张三朋友的朋友也是他的朋友
- 存在最小的自然数
- (*) 子非鱼，安知鱼之乐

练习与讨论 8.3

假设论域是人类，翻译下列语句

- 每个男孩都爱白月魁
- 不是所有男孩都爱自己
- 白月魁爱一个爱冉冰的男孩
- 一个爱冉冰的男孩没有男孩或女孩爱

能否给出一个 图 使得你对上面这些语句的翻译全都成立

练习与讨论 8.4

自然数上的整除关系是

- 传递的吗?
- 自反的吗?
- 对称的吗?
- 线性的吗?

练习与讨论 8.5

考虑下面的图，我们用 Rxy 表示有从节点 x 到 y 的箭头

- $\exists x \forall y Rxy$ 关于上面的图成立吗?
- 如果成立，为什么? 如果不成立，尝试对上面的图做最小的改动使得这个公式成立。

练习与讨论 8.6*

我们用图来表示社交网络，其中 Rxy 表示 x 能联系到 y。我们称一个图是 连接的 （connected），当且仅当图中任意两个节点之间至少有一个箭头。

- 写出一个谓词逻辑公式，使得满足这个公式的图是连接的
- 我们称图中的一个节点是 社牛 ，当且仅当它可以通过至多两个箭头联系到图中任何一个节点。证明：任何有穷的、自反的、连接的图都有一个社牛
- 无穷的图呢?

Proof of 8.6 (2)

We proof by induction on $n \geq 1$: For every (nonempty) graph with size $\leq n$, there is a Great Communicator (GC). Assume it holds for n. Fix a graph G of size $n+1$ with the set of vertex $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Assume to contradiction that G has no GC. Consider the subgraph $G_n = G \restriction \{a_1, \ldots, a_n\}$. It is a graph of size n. If $n = 0$, trivial. If $n \geq 1$, the set of GC in G_n is nonempty.

First, note that there is no GC $b \in G_n$ such that $b \to a_0$. For otherwise, b was a GC in G. Therefore, for each GC $b \in G_n$, $b \not\to a_0$, and so $a_0 \to b$.