逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

前情提要

命题逻辑的语义:原子命题、赋值函数、逻辑常项或逻辑词和复合命题的语义实质蕴涵

- 真值表
- (命题逻辑的) 有效推理与可满足性

定义

我们用 $\models \varphi$ 表示 空集 $\emptyset \models \varphi$,也即 $\{\neg \varphi\}$ 不可满足。此时,我没也称 φ 是 <u>重言式</u> (tautology)。

例 (几则常见的重言式)

- $\neg(\varphi \land \neg\varphi)$
- $\blacksquare \varphi \lor \neg \varphi$
- $\neg \neg \varphi \leftrightarrow \varphi$

(非) 矛盾律

排中律

双重否定

例 (几则常见的重言式)

$$\neg (\varphi \lor \psi) \leftrightarrow (\neg \varphi \land \neg \psi)$$

德摩根律

 $\neg(\varphi \land \psi) \leftrightarrow (\neg \varphi \lor \neg \psi)$

(De Morgan laws)

 $(\varphi \land (\psi \lor \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi))$ $(\varphi \lor (\psi \land \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi))$

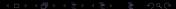
分配律

根据定义不难看出,所有有效的推理可以被"编码"为重言式

事实

任给公式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ_i

 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \Leftrightarrow (\varphi_1 \land \dots \land \varphi_n) \rightarrow \underline{\psi}$ 是重言式



日常语言中的"证明"

- 他试图通过不在场 证明 证明 自己是无罪的
- 这次捕捉到的引力波信号 证明 了爱因斯坦的理论
- 数学证明与它们的异同?

Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper.

希尔伯特 (David Hilbert)

例

欧几里得几何原本 (Elements)

- 公设 1: 从任一点到另一点可以画一直线段
- 公设 3: 一个点和以该点为端点的一个线段可以确定一个圆
- 命题 1: 给定一个线段,可以构造一个等边三角形

命题 1: 给定一个线段,可以构造一个以该线段为边的等边 三角形

证明

给定线段 AB, 要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆,还可以确定

以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点:

(由公设1)可以连接AC、BC

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 = AB 的长度, 且 BC

的长度 = AB 的长度

命题 1: 给定一个线段,可以构造一个以该线段为边的等边 三角形

证明.

给定线段 AB, 要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆,还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 = AB 的长度, 且 BC 的长度 = AB 的长度

命题 1: 给定一个线段,可以构造一个以该线段为边的等边 三角形

证明.

给定线段 AB, 要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆,还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设1)可以连接AC、BC

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 = AB 的长度, 且 BC 的长度 = AB 的长度

命题 1: 给定一个线段,可以构造一个以该线段为边的等边 三角形

证明.

给定线段 AB, 要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆,还可以确定

以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 = AB 的长度, 且 BC

命题 1: 给定一个线段,可以构造一个以该线段为边的等边 三角形

证明.

给定线段 AB, 要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆,还可以确定

以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 = AB 的长度,且 BC 的长度 = AB 的长度

命题 1: 给定一个线段,可以构造一个以该线段为边的等边 三角形

证明.

给定线段 AB, 要构造以 AB 为边的等边三角形。

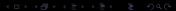
(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆,还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点:

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 = AB 的长度, 且 BC

的长度 = AB 的长度



定义

- 一个 证明 (proof) 是一个语句或公式的序列,其中每个语句或者是 公理 (axiom),或者从之前的语句中通过 演绎规则 (deduction rule)得到。
- 一个语句或公式是 定理 (theorem), 当且仅当它出现 在证明中 (一般是证明中的最后一条)
- 一组公理和演绎规则构成了一个 公理系统 (axiomatization)

定义(一个命题逻辑的公理系统)

■ 公理:

(P1)
$$\varphi \to \psi \to \varphi$$

(P2) $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$
(P3) $(\neg \varphi \to \psi) \to (\neg \varphi \to \neg \psi) \to \varphi$

■ 演绎规则: 如果 φ 和 ($\varphi \to \psi$) 是定理,那么 ψ 也是定理 (分离规则 , modus ponens)

注意

- 我们在描述公理和定理时用了元语言符号 φ, ψ, χ, 这 意味着这个公理系统包含无穷条公理
- 在这个公理系统中只用到 ¬ 和 → 两个逻辑常项

例 (一个公理系统中的证明)

我们希望证明形如 $\varphi \to \varphi$ 的公式都是该公理系统的定理

$$(\varphi \to \psi \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)$$
 分离规则

$$4 \quad \varphi \to \psi \to \varphi \tag{P1}$$

5 $\varphi \to \varphi$ 分离规则

例 (一个公理系统中的证明)

 $\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$ 也是定理

$$1 \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi$$

例 (一个公理系统中的证明)

$$6 \neg \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

7
$$\left(\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)\right) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$$

$$9 \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$$

下面这些也是定理(练习)

$$\blacksquare \ (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg \psi) \to \neg \varphi$$

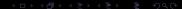
$$\neg \varphi \to \varphi \to \psi$$

$$\blacksquare \ \varphi \to \neg \psi \to \neg (\varphi \to \psi)$$

现实中,我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的例(聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会,但有如下限制

- 如果张三或李四来,那么王五就得来
- 如果张三不来,李四就会来
- 如果李四来,那么王五不会来



现实中, 我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会, 但有如下限制

- $(P \lor O) \to R$
- 如果张三不来,李四就会来
- 如果李四来,那么王五不会来



现实中, 我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会, 但有如下限制

- $(P \lor Q) \to R$
- $\neg P \rightarrow Q$
- 如果李四来,那么王五不会来

现实中, 我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会, 但有如下限制

$$(P \lor Q) \to R$$

$$\neg P \rightarrow Q$$

$$Q \rightarrow \neg R$$

现实中, 我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会,但有如下限制

- $(P \lor Q) \to R$
- $\neg P \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow \neg R$



现实中, 我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会, 但有如下限制

- $P \rightarrow R, Q \rightarrow R$
- $\neg P \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow \neg R$



我们也可以通过证明:

$$\blacksquare (P \to R) \to (Q \to \neg R) \to \neg Q$$

$$\blacksquare P \rightarrow R$$

$$\blacksquare (Q \to \neg R) \to \neg Q$$

$$\square Q \rightarrow \neg R$$

$$\blacksquare \neg Q$$

记法

令 Σ 是公式集,如何存在公式序列,其中每条公式或者是公理或者是 Σ 中公式或者从之前的语句通过演绎规则得到,我们称该序列中的公式 在 Σ 中可证。假设 ψ 是该序列中公式,我们记作

 $\Sigma \vdash \psi$

当 $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 是有穷条公式时,我们也写成 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$; 当 Σ 是空集时,我们可以写成 $\vdash \psi$,此时 ψ 是公理系统的定理。

例

$$\blacksquare P \to R, Q \to R, Q \to \neg R, \neg P \to Q \vdash \neg Q$$

$$\blacksquare P \to R, Q \to R, Q \to \neg R, \neg P \to Q \vdash P$$

$$\blacksquare P \to R, Q \to R, Q \to \neg R, \neg P \to Q \vdash R$$

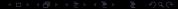
公理系统的重要属性

■ 我们称一个公理系统是 可靠的 (sound), 也即其中的 证明都是有效的, 更严格地:

$$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi \implies \varphi_1,\ldots,\varphi_n \models \psi$$

■ 我们称公理系统是 完全的 (complete), 是指每个有效的推理都有对应的证明, 即

$$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \models \psi \implies \varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$$



回忆: 我们给出的公理系统只涉及两个逻辑常项 ¬ 和 →, 我们又声称这个公理系统是完全的。

那

$$(p \lor q) \to r \models p \to r$$

可有对应的证明?

回忆: 我们给出的公理系统只涉及两个逻辑常项 ¬ 和 →, 我们又声称这个公理系统是完全的。

那

$$(p \lor q) \to r \models p \to r$$

可有对应的证明?

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \lor \psi$	$\neg \varphi \rightarrow \psi$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

仅考虑命题逻辑的语义,我们可以用 $\neg \varphi \rightarrow \psi$ 代替 $\varphi \lor \psi$

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \lor \psi$	$\neg \varphi \rightarrow \psi$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

仅考虑命题逻辑的语义,我们可以用 $\neg \varphi \rightarrow \psi$ 代替 $\varphi \lor \psi$

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \lor \psi$	$\neg \varphi \rightarrow \psi$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

仅考虑命题逻辑的语义,我们可以用 $\neg \varphi \rightarrow \psi$ 代替 $\varphi \lor \psi$

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \lor \psi$	$\neg \varphi \rightarrow \psi$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

仅考虑命题逻辑的语义,我们可以用 $\neg \varphi \rightarrow \psi$ 代替 $\varphi \lor \psi$

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \lor \psi$	$\neg \varphi \rightarrow \psi$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

仅考虑命题逻辑的语义,我们可以用 $\neg \varphi \rightarrow \psi$ 代替 $\varphi \lor \psi$

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 ¬ $\varphi \lor \psi$ 的真值表相同。这意味 着我们也可以用 ¬ $\varphi \lor \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- φ ∨ ψ 可以用 ¬ 和 ∧ 组成的公式代替吗?
- 反过来, φ∧ψ 呢?

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg \varphi \lor \psi$ 的真值表相同。这意味 着我们也可以用 $\neg \varphi \lor \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- φ ∨ ψ 可以用 ¬ 和 ∧ 组成的公式代替吗?
- 反过来, φ∧ψ 呢?

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg \varphi \lor \psi$ 的真值表相同。这意味 着我们也可以用 $\neg \varphi \lor \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- $\varphi \lor \psi$ 可以用 ¬ 和 \wedge 组成的公式代替吗?
- 反过来, φ∧ψ 呢?

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg \varphi \lor \psi$ 的真值表相同。这意味 着我们也可以用 $\neg \varphi \lor \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- $\varphi \lor \psi$ 可以用 ¬ 和 \wedge 组成的公式代替吗?
- 反过来, φ∧ψ 呢?

争对上述现象,我们称∨(的语义) 可以被(由)¬和

- → (生成的命题逻辑语言) 表达。
 - 考虑命题逻辑语义,我们理论上有多少种可能的一元命题连接词,多少种二元连接词?它们都可以被¬和
 - → 表达吗?

争对上述现象,我们称∨(的语义)可以被(由)¬和

- → (生成的命题逻辑语言) 表达。
 - 考虑命题逻辑语义,我们理论上有多少种可能的一元 命题连接词,多少种二元连接词?它们都可以被 ¬和
 - → 表达吗?

争对上述现象,我们称∨(的语义) 可以被(由)¬和

- → (生成的命题逻辑语言) 表达。
 - 考虑命题逻辑语义,我们理论上有多少种可能的一元 命题连接词,多少种二元连接词?它们都可以被¬和
 - → 表达吗?

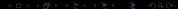
对任何命题逻辑公式 φ ,如果 φ 中至多含有命题变元 p_1, \ldots, p_n ,我们可以画出 φ 的 2^n 行的真值表。由此,我们可以认为 φ 表达了一个 n 元命题连接词

事实

任意可能的 n 元命题连接词都可以被 \neg 和 \rightarrow 表达 因此,我们称 \neg 和 \rightarrow 是 表达力完全的

特价商品购物问题

- 背景: 在日常生活中,如果我去超市,那么如果看到特价商品且我有足够的钱,我会买,除非他是乳制品(因为我乳糖不耐受)。我去了超市,但没有买特价商品,且我有足够的钱。并非所有特价商品都是乳制品。
- 问题: 我看到不是乳制品的特价商品了吗?
- 答案: 否



特价商品购物问题

- 翻译:
 - P 我去了超市
 - R 我有足够的钱
 - S 我买了这件特价商品
 - No 我看到的是乳制品的特价商品
 - Q(x) 我看到特价商品

特价商品购物问题

■ 形式化:

■ 前提 1: $(P \land Q(x) \land \neg No \land R) \rightarrow S$

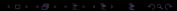
■ 前提 2: *P* ∧ (¬*S* ∧ *R*)

■ 前提 3: ∃(*Q*(*x*) ∧ ¬*No*)

■ 结论: No

特价商品购物问题

- 背景:在日常生活中,如果我去超市,那么如果看到特价商品且我有足够的钱,我会买,除非他是乳制品(因为我乳糖不耐受)。我去了超市,但没有买特价商品,且我有足够的钱。并非所有特价商品都是乳制品。
- 问题: 我看到不是乳制品的特价商品了吗?
- 答案: 否



特价商品购物问题

日常语言部分

- "我看到不是乳制品的特价商品"的否定是"我没有看到不是乳制品的特价商品",也就是"我看到的特价商品"品都是乳制品"
- "并非所有特价商品都是乳制品",即 "有非乳制品的特价商品" (迷惑项?)

特价商品购物问题

日常语言部分

- "我看到不是乳制品的特价商品"的否定是"我没有看到不是乳制品的特价商品",也就是"我看到的特价商品"。 品都是乳制品"
- "并非所有特价商品都是乳制品",即"有非乳制品的 特价商品" (迷惑项?)

特价商品购物问题

翻译与形式化部分:希望用

- $(P \land Q(x) \land \neg No \land R) \to S$ 表示 "如果我去超市,那么如果看到特价商品且我有足够的钱,我会买,除非他是乳制品"
- ∃(Q(x) ∧ ¬No) 表示 "并非所有特价商品都是乳制品"

特价商品购物问题

翻译与形式化部分: 可以用

- $\forall x \Big((P \land K(x) \land Q(x) \land \neg N(x) \land R) \rightarrow S(x) \Big)$ 表示 "如果 我去超市,那么如果看到特价商品且我有足够的钱, 我会买,除非他是乳制品"
- ∃(Q(x) ∧ ¬No) 表示 "并非所有特价商品都是乳制品"

特价商品购物问题

翻译与形式化部分: 可以用

- $\forall x \Big((P \land K(x) \land Q(x) \land \neg N(x) \land R) \rightarrow S(x) \Big)$ 表示 "如果 我去超市,那么如果看到特价商品且我有足够的钱, 我会买,除非他是乳制品"
- ∃x(Q(x) ∧ ¬N(x)) 表示 "并非所有特价商品都是乳制品"

特价商品购物问题

翻译与形式化部分: 类似地, 可以用

- P ∧ R ∧ ¬∃x(Q(x) ∧ S(x)) 表示 "我去了超市,但没有买 特价商品,且我有足够的钱"
- ¬ $\exists x(K(x) \land Q(x) \land \neg N(x))$ 表示 "我没有看到不是乳制品的特价商品"

特价商品购物问题 强行用命题逻辑的近似翻译

- P 我去了超市
- R 我有足够的钱
- S 我买了这件特价商品
- *N* 我看到的这件是乳制品
- Q 我看到的这件是特价商品

特价商品购物问题

强行用命题逻辑的近似翻译

- 前提 1: $(P \land Q \land \neg N \land R) \rightarrow S$
- 前提 2: *P* ∧ ¬*S* ∧ *R*
- 结论:¬(Q ∧ ¬N)

练习与讨论

obligatio game 据传是起源于中世纪的逻辑游戏。老师们用 这种游戏来测试学生的逻辑。游戏会讲行若干轮。每一轮 中老师会给出一个命题 φ_i ,学生必须选择"接受"或"拒 绝"该命题。如果接受该命题,则将 φ_i 放入已有命题的集 \underline{C} ,否则将 \underline{G} ,放入。如果放入后的命题集合矛盾了,则 学生失败。如果既定轮数后得到命题集合仍然没有矛盾, 学生诵过测试。

练习与讨论

■ 假设 obligatio game 游戏中的老师想好了出题顺序:

(1)
$$q \vee \neg (p \vee r)$$
, (2) $p \rightarrow q$, (3) q

- 如果你在第一轮中选择了"接受",那么在第二第三轮中,你可以选择"接受"还是"拒绝"?
- 如果你在第一轮选择了"拒绝"呢?
- 你能否在 obligatio game 中作为老师出些题难倒你的同学?

练习与讨论

- 利用 ¬ 和 ∧ 表达所有可能的二元连接词
- (*) 证明 ¬, ∨, ∧ 是表达力完全的