逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语义：原子命题、赋值函数、逻辑常项或逻辑词和复合命题的语义
  实质蕴涵
- 真值表
- (命题逻辑的）有效推理与可满足性

重言式

定义

我们用 $\models \varphi$ 表示 空集 $\emptyset \models \varphi$，也即 $\{\neg\varphi\}$ 不可满足。此时，我没也称 φ 是 重言式 （tautology）。

重言式

例 (几则常见的重言式)

- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ （非）矛盾律
- $\varphi \vee \neg\varphi$ 排中律
- $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ 双重否定

重言式

例 (几则常见的重言式)

- $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 德摩根律

  $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (De Morgan laws)

- $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

  $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ 分配律

重言式

根据定义不难看出，所有有效的推理可以被“编码”为重言式

事实

任给公式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ，

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi \iff (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi \text{ 是重言式}$$

证明

日常语言中的“证明”

- 他试图通过不在场 证明 证明 自己是无罪的
- 这次捕捉到的引力波信号 证明 了爱因斯坦的理论
- 数学证明与它们的异同?

证明

Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper.

希尔伯特（David Hilbert）

证明

例

欧几里得几何原本（*Elements*）

- 公设 1: 从任一点到另一点可以画一直线段
- 公设 3: 一个点和以该点为端点的一个线段可以确定一个圆
- 命题 1: 给定一个线段，可以构造一个等边三角形

证明

命题 1：给定一个线段，可以构造一个以该线段为边的等边三角形

证明.

给定线段 AB，要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆，还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆；

取 C 为两个圆的一个交点；

(由公设 1) 可以连接 AC、BC；

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 $=$ AB 的长度，且 BC 的长度 $=$ AB 的长度

证明

命题 1: 给定一个线段，可以构造一个以该线段为边的等边三角形

证明.

给定线段 AB，要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆，还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 $= AB$ 的长度，且 BC 的长度 $= AB$ 的长度

证明

命题 1: 给定一个线段，可以构造一个以该线段为边的等边三角形

证明.

给定线段 AB，要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆，还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 $= AB$ 的长度，且 BC 的长度 $= AB$ 的长度

证明

命题 1: 给定一个线段，可以构造一个以该线段为边的等边三角形

证明.

给定线段 AB，要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆，还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 $= AB$ 的长度，且 BC 的长度 $= AB$ 的长度

证明

命题 1: 给定一个线段，可以构造一个以该线段为边的等边三角形

证明.

给定线段 AB，要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆，还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 $= AB$ 的长度，且 BC 的长度 $= AB$ 的长度

命题 1: 给定一个线段，可以构造一个以该线段为边的等边三角形

证明.

给定线段 AB，要构造以 AB 为边的等边三角形。

(由公设 3) 可以确定以 A 为圆心 AB 为半径的圆，还可以确定以 B 为圆心 AB 为半径的圆;

取 C 为两个圆的一个交点;

(由公设 1) 可以连接 AC、BC;

(由圆、半径、长度等的定义) AC 的长度 $= AB$ 的长度，且 BC 的长度 $= AB$ 的长度

证明

定义

- 一个 证明 （proof）是一个语句或公式的序列，其中每个语句或者是 公理 （axiom），或者从之前的语句中通过 演绎规则 （deduction rule）得到。
- 一个语句或公式是 定理 （theorem），当且仅当它出现在证明中（一般是证明中的最后一条）
- 一组公理和演绎规则构成了一个 公理系统 (axiomatization)

证明

定义 (一个命题逻辑的公理系统)

- 公理:

  (P1) $\varphi \to \psi \to \varphi$

  (P2) $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$

  (P3) $(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$

- 演绎规则: 如果 φ 和 $(\varphi \to \psi)$ 是定理，那么 ψ 也是定理 （分离规则， modus ponens）

证明

注意

- 我们在描述公理和定理时用了元语言符号 φ, ψ, χ，这意味着这个公理系统包含无穷条公理
- 在这个公理系统中只用到 $\neg$ 和 $\rightarrow$ 两个逻辑常项

证明

例 (一个公理系统中的证明)

我们希望证明形如 $\varphi \to \varphi$ 的公式都是该公理系统的定理

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi$ (P1)
2. $(\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ (P2)
3. $(\varphi \to \psi \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)$ 分离规则
4. $\varphi \to \psi \to \varphi$ (P1)
5. $\varphi \to \varphi$ 分离规则

例 (一个公理系统中的证明)

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ 也是定理

1. $\neg\varphi \to \neg\varphi$
2. $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$
3. $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi$
4. $((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi) \to \neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)$

例 (一个公理系统中的证明)

5. $\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)$
6. $\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi$
7. $\big(\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \varphi)\big) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$
8. $(\neg\neg\varphi \to \neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\neg\varphi \to \varphi$
9. $\neg\neg\varphi \to \varphi$

证明

下面这些也是定理（练习）

- $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
- $\varphi \to \neg\neg\varphi$
- $\neg\varphi \to \varphi \to \psi$
- $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$
- $\varphi \to \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$

证明

现实中，我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会，但有如下限制

- 如果张三或李四来，那么王五就得来
- 如果张三不来，李四就会来
- 如果李四来，那么王五不会来

我们可以使用真值表来找到 解

证明

现实中，我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会，但有如下限制

- $(P \vee Q) \rightarrow R$
- 如果张三不来，李四就会来
- 如果李四来，那么王五不会来

我们可以使用真值表来找到 解

证明

现实中，我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会，但有如下限制

- $(P \lor Q) \to R$
- $\neg P \to Q$
- 如果李四来，那么王五不会来

我们可以使用真值表来找到 解

证明

现实中，我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会，但有如下限制

- $(P \vee Q) \rightarrow R$
- $\neg P \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow \neg R$

我们可以使用真值表来找到 解

证明

现实中，我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会，但有如下限制

- $(P \vee Q) \to R$
- $\neg P \to Q$
- $Q \to \neg R$

我们可以使用真值表来找到 解

证明

现实中，我们往往是从一些前提加上公理来证明结论的

例 (聚会筹划)

假设我们要规划一个聚会，但有如下限制

- $P \to R,\ Q \to R$
- $\neg P \to Q$
- $Q \to \neg R$

我们可以使用真值表来找到 解

证明

我们也可以通过证明:

- $(P \to R) \to (Q \to \neg R) \to \neg Q$
- $P \to R$
- $(Q \to \neg R) \to \neg Q$
- $Q \to \neg R$
- $\neg Q$

记法

令 Σ 是公式集，如何存在公式序列，其中每条公式或者是公理或者是 Σ 中公式或者从之前的语句通过演绎规则得到，我们称该序列中的公式 在 Σ 中可证 。假设 ψ 是该序列中公式，我们记作

$$\Sigma \vdash \psi$$

当 $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ 是有穷条公式时，我们也写成 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$；当 Σ 是空集时，我们可以写成 $\vdash \psi$，此时 ψ 是公理系统的定理。

证明

例

- $P \to R, Q \to R, Q \to \neg R, \neg P \to Q \vdash \neg Q$
- $P \to R, Q \to R, Q \to \neg R, \neg P \to Q \vdash P$
- $P \to R, Q \to R, Q \to \neg R, \neg P \to Q \vdash R$

公理系统的重要属性

- 我们称一个公理系统是 可靠的 （sound），也即其中的证明都是有效的，更严格地：

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \;\Rightarrow\; \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

- 我们称公理系统是 完全的 （complete），是指每个有效的推理都有对应的证明，即

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi \;\Rightarrow\; \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

表达力

回忆: 我们给出的公理系统只涉及两个逻辑常项 $\neg$ 和 $\rightarrow$，我们又声称这个公理系统是完全的。

那

$$(p \vee q) \rightarrow r \vDash p \rightarrow r$$

可有对应的证明?

表达力

回忆: 我们给出的公理系统只涉及两个逻辑常项 $\neg$ 和 $\to$，我们又声称这个公理系统是完全的。

那

$$(p \vee q) \to r \vDash p \to r$$

可有对应的证明?

表达力

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi \rightarrow \psi$
1	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
0	0	**0**	**0**

仅考虑命题逻辑的语义，我们可以用 $\neg\varphi \rightarrow \psi$ 代替 $\varphi \vee \psi$

表达力

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi \to \psi$
1	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
0	0	**0**	**0**

仅考虑命题逻辑的语义，我们可以用 $\neg\varphi \to \psi$ 代替 $\varphi \vee \psi$

表达力

考虑真值表：

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi \to \psi$
1	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
0	0	**0**	**0**

仅考虑命题逻辑的语义，我们可以用 $\neg\varphi \to \psi$ 代替 $\varphi \vee \psi$

表达力

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi \to \psi$
1	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
0	0	**0**	**0**

仅考虑命题逻辑的语义，我们可以用 $\neg\varphi \to \psi$ 代替 $\varphi \vee \psi$

表达力

考虑真值表:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi \to \psi$
1	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
0	0	**0**	**0**

仅考虑命题逻辑的语义，我们可以用 $\neg\varphi \to \psi$ 代替 $\varphi \vee \psi$

表达力

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg\varphi \vee \psi$ 的真值表相同。这意味着我们也可以用 $\neg\varphi \vee \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- $\varphi \vee \psi$ 可以用 $\neg$ 和 $\wedge$ 组成的公式代替吗?
- 反过来，$\varphi \wedge \psi$ 呢?

表达力

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg\varphi \vee \psi$ 的真值表相同。这意味着我们也可以用 $\neg\varphi \vee \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- $\varphi \vee \psi$ 可以用 $\neg$ 和 $\wedge$ 组成的公式代替吗?
- 反过来，$\varphi \wedge \psi$ 呢?

表达力

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg\varphi \vee \psi$ 的真值表相同。这意味着我们也可以用 $\neg\varphi \vee \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- $\varphi \vee \psi$ 可以用 $\neg$ 和 $\wedge$ 组成的公式代替吗?
- 反过来，$\varphi \wedge \psi$ 呢?

表达力

- 而 $\varphi \to \psi$ 的真值表与 $\neg\varphi \vee \psi$ 的真值表相同。这意味着我们也可以用 $\neg\varphi \vee \psi$ 代替 $\varphi \to \psi$
- $\varphi \vee \psi$ 可以用 $\neg$ 和 $\wedge$ 组成的公式代替吗?
- 反过来，$\varphi \wedge \psi$ 呢?

表达力

争对上述现象，我们称 ∨ （的语义） 可以被 （由） ¬ 和 → （生成的命题逻辑语言） 表达 。

- 考虑命题逻辑语义，我们理论上有多少种可能的一元命题连接词，多少种二元连接词？它们都可以被 ¬ 和 → 表达吗？

表达力

争对上述现象，我们称 $\vee$ （的语义） 可以被 （由） $\neg$ 和 $\rightarrow$ （生成的命题逻辑语言） 表达 。

- 考虑命题逻辑语义，我们理论上有多少种可能的一元命题连接词，多少种二元连接词？它们都可以被 $\neg$ 和 $\rightarrow$ 表达吗？

表达力

争对上述现象，我们称 $\vee$ （的语义） 可以被 （由） $\neg$ 和 $\rightarrow$ （生成的命题逻辑语言） 表达 。

- 考虑命题逻辑语义，我们理论上有多少种可能的一元命题连接词，多少种二元连接词？它们都可以被 $\neg$ 和 $\rightarrow$ 表达吗？

表达力

对任何命题逻辑公式 φ，如果 φ 中至多含有命题变元 $p_1, \ldots, p_n$，我们可以画出 φ 的 2^n 行的真值表。由此，我们可以认为 φ 表达了一个 n 元命题连接词

事实

任意可能的 n 元命题连接词都可以被 $\neg$ 和 $\rightarrow$ 表达

因此，我们称 $\neg$ 和 $\rightarrow$ 是 **表达力完全的**

特价商品购物问题

- 背景: 在日常生活中，如果我去超市，那么如果看到特价商品且我有足够的钱，我会买，除非他是乳制品(因为我乳糖不耐受)。我去了超市，但没有买特价商品，且我有足够的钱。并非所有特价商品都是乳制品。
- 问题: 我看到不是乳制品的特价商品了吗?
- 答案: 否

翻译与形式化

特价商品购物问题

- 翻译:
  - P 我去了超市
  - R 我有足够的钱
  - S 我买了这件特价商品
  - No 我看到的是乳制品的特价商品
  - $Q(x)$ 我看到特价商品

特价商品购物问题

- 形式化:
  - 前提 1: $(P \land Q(x) \land \neg No \land R) \to S$
  - 前提 2: $P \land (\neg S \land R)$
  - 前提 3: $\exists(Q(x) \land \neg No)$
  - 结论: No

特价商品购物问题

- 背景：在日常生活中，如果我去超市，那么如果看到特价商品且我有足够的钱，我会买，除非他是乳制品(因为我乳糖不耐受)。我去了超市，但没有买特价商品，且我有足够的钱。并非所有特价商品都是乳制品。
- 问题：我看到不是乳制品的特价商品了吗？
- 答案：否

特价商品购物问题

日常语言部分

- “我看到不是乳制品的特价商品”的否定是“我没有看到不是乳制品的特价商品”，也就是“我看到的特价商品都是乳制品”
- “并非所有特价商品都是乳制品”，即“有非乳制品的特价商品” (迷惑项?)

翻译与形式化

特价商品购物问题

日常语言部分

- “我看到不是乳制品的特价商品”的否定是“我没有看到不是乳制品的特价商品”，也就是“我看到的特价商品都是乳制品”
- “并非所有特价商品都是乳制品”，即“有非乳制品的特价商品” (迷惑项?)

特价商品购物问题

翻译与形式化部分: 希望用

- $(P \wedge Q(x) \wedge \neg No \wedge R) \rightarrow S$ 表示“如果我去超市，那么如果看到特价商品且我有足够的钱，我会买，除非他是乳制品”
- $\exists(Q(x) \wedge \neg No)$ 表示“并非所有特价商品都是乳制品”

翻译与形式化

特价商品购物问题

翻译与形式化部分: 可以用

- $\forall x\big((P \wedge K(x) \wedge Q(x) \wedge \neg N(x) \wedge R) \to S(x)\big)$ 表示“如果我去超市，那么如果看到特价商品且我有足够的钱，我会买，除非他是乳制品”
- $\exists(Q(x) \wedge \neg No)$ 表示“并非所有特价商品都是乳制品”

翻译与形式化

特价商品购物问题

翻译与形式化部分：可以用

- $\forall x\big((P \wedge K(x) \wedge Q(x) \wedge \neg N(x) \wedge R) \rightarrow S(x)\big)$ 表示“如果我去超市，那么如果看到特价商品且我有足够的钱，我会买，除非他是乳制品”
- $\exists x(Q(x) \wedge \neg N(x))$ 表示“并非所有特价商品都是乳制品”

特价商品购物问题

翻译与形式化部分: 类似地，可以用

- $P \wedge R \wedge \neg\exists x(Q(x) \wedge S(x))$ 表示“我去了超市，但没有买特价商品，且我有足够的钱”
- $\neg\exists x(K(x) \wedge Q(x) \wedge \neg N(x))$ 表示“我没有看到不是乳制品的特价商品”

翻译与形式化

特价商品购物问题

强行用命题逻辑的近似翻译

- P 我去了超市
- R 我有足够的钱
- S 我买了这件特价商品
- N 我看到的这件是乳制品
- Q 我看到的这件是特价商品

翻译与形式化

特价商品购物问题

强行用命题逻辑的近似翻译

- 前提 1: $(P \land Q \land \neg N \land R) \to S$
- 前提 2: $P \land \neg S \land R$
- 结论: $\neg(Q \land \neg N)$

练习与讨论

obligatio game 据传是起源于中世纪的逻辑游戏。老师们用这种游戏来测试学生的逻辑。游戏会进行若干轮。每一轮中老师会给出一个命题 φ_i，学生必须选择“接受”或“拒绝”该命题。如果接受该命题，则将 φ_i 放入已有命题的集合，否则将 $\neg\varphi_i$ 放入。如果放入后的命题集合矛盾了，则学生失败。如果既定轮数后得到命题集合仍然没有矛盾，学生通过测试。

练习与讨论

- 假设 obligatio game 游戏中的老师想好了出题顺序：(1) $q \vee \neg(p \vee r)$、(2) $p \to q$、(3) q
  - 如果你在第一轮中选择了“接受”，那么在第二第三轮中，你可以选择“接受”还是“拒绝”?
  - 如果你在第一轮选择了“拒绝”呢?
- 你能否在 obligatio game 中作为老师出些题难倒你的同学?

练习与讨论

- 利用 $\neg$ 和 $\wedge$ 表达所有可能的二元连接词
- (*) 证明 $\neg, \vee, \wedge$ 是表达力完全的