

逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

前情提要

- 日常语言中的逻辑词
- 命题逻辑的形式语言
 - 公式的定义（递归定义）
 - 形式语言与元语言
 - 构造树与括号的使用

前情提要

- 命题逻辑的语义
 - 命题逻辑中，命题的语义只有真假
 - 命题逻辑的一个语义情形：对原子命题的赋值函数
 - 连接词的语义：如何得到复合命题真假的规则

命题逻辑的语义

真值表 (truth table)

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

命题逻辑的语义

真值表 (truth table)

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

实质蕴涵

注意：根据上述真值表对 $\varphi \rightarrow \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候， $\varphi \rightarrow \psi$ 就为真。“ \rightarrow ”的这种语义被称作 **实质蕴涵**（material implication）

例

- 向西航行能够到达印度 \rightarrow 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 \rightarrow 所有人都会开心

实质蕴涵

注意：根据上述真值表对 $\varphi \rightarrow \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候， $\varphi \rightarrow \psi$ 就为真。“ \rightarrow ”的这种语义被称作 **实质蕴涵**（material implication）

例

- 向西航行能够到达印度 \rightarrow 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 \rightarrow 所有人都会开心

实质蕴涵

注意：根据上述真值表对 $\varphi \rightarrow \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候， $\varphi \rightarrow \psi$ 就为真。“ \rightarrow ”的这种语义被称作 **实质蕴涵**（material implication）

例

- 向西航行**不能**到达印度 \rightarrow 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 \rightarrow 所有人都会开心

实质蕴涵

注意：根据上述真值表对 $\varphi \rightarrow \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候， $\varphi \rightarrow \psi$ 就为真。“ \rightarrow ”的这种语义被称作 **实质蕴涵**（material implication）

例

- 向西航行**不能**到达印度 \rightarrow 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 \rightarrow 所有人都会开心

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	?
0	0	?

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

实质蕴涵

例

- 任给一个数，如果它大于 3，那么它大于 2
- 如果我当上总统，那么我一天内就可以结束俄乌冲突
- 如果 xxx, 我就捐 5kw

实质蕴涵

例

- 任给一个数, 如果它大于 3, 那么它大于 2
- 如果我当上总统, 那么我一天内就可以结束俄乌冲突
- 如果 xxx, 我就捐 5kw

实质蕴涵

例

- 任给一个数，如果它大于 3，那么它大于 2
- 如果我当上总统，那么我一天内就可以结束俄乌冲突
- 如果 xxx, 我就捐 5kw

实质蕴涵

例

- 任给一个数，如果它大于 3，那么它大于 2
- 如果我当上总统，那么我一天内就可以结束俄乌冲突
- 如果中国队能进世界杯 16 强，我给全班 A

实质蕴涵

例 (“哥德巴赫猜想”)

This is a number theory question. If 87920384487 is prime, then Goldbach conjecture holds. Is this true?

- Qwen3-Max
- Deepseek V3.2

User

This is a number theory question. If 87920384487 is prime, then Goldbach conjecture holds. Is this true?

“哥德巴赫猜想” – Gemini 2.5 Pro

Model

◆ Thoughts (experimental)

Auto

Expand to view model thoughts



The assertion that the Goldbach conjecture holds true if the number 87920384487 is prime is incorrect. The truth of the Goldbach conjecture, a long-standing and unproven mathematical problem, does not depend on the primality of any single number.

The Goldbach conjecture, proposed by Christian Goldbach in 1742, posits that every even integer greater than 2 can be expressed as the sum of two prime numbers.[1][2][3] For instance, $4 = 2 + 2$, $8 = 3 + 5$, and $20 = 7 + 13$. This conjecture has been verified for an immense range of numbers, up to 4×10^{18} , but a general proof that it holds for all even integers remains elusive.[1]

To prove the Goldbach conjecture, a mathematical argument must be formulated that demonstrates its validity for *every* even integer greater than 2. The primality of a specific number, such as 87920384487, is a property of that individual number and does not provide a universal proof that applies to all even numbers. In essence, the status of this particular number has no bearing on the general truth of the conjecture.

While there have been related breakthroughs, such as the proof of the weak Goldbach conjecture which states that every odd number greater than 5 can be expressed as the sum of three primes, the original (or strong) Goldbach conjecture remains one of the most significant unsolved problems in number theory.[4] Therefore, the statement presented in the question is a non sequitur; the primality of 87920384487 is irrelevant to the resolution of the Goldbach conjecture.

This is a number theory question. If 87920384487 is prime, then Goldbach conjecture holds. Is this true?

“哥德巴赫猜想” – ChatGPT

Thought for 12s

Short answer: **Yes — but only vacuously.**

Compute the number:

$$87920384487 = 3 \times 13 \times 53 \times 42\,535\,261,$$

so it is **composite**. A conditional statement “If P then Q ” is true whenever P is false, so the implication

“If 87920384487 is prime, then Goldbach holds.”

is true — but only for the trivial reason that the antecedent is false.

Important clarifications:

- That truth is **logical/vacuous**, not a meaningful mathematical proof that Goldbach’s conjecture follows from any easily checked property of a single number.
- Even if that specific number *were* prime, there is no known theorem that the primality of one particular 11-digit number implies the full Goldbach conjecture for all even integers; proving Goldbach would require a global argument, not the primality of one integer.

So: the implication as written is true (because the number is not prime), but it’s not evidence for Goldbach.

📄 📌 🗨️ 🔄 ⋮



+ Ask anything



This is a number theory question. If 87920384487 is prime, then Goldbach conjecture holds. Is this true?

“哥德巴赫猜想” – Grok

💡 Thought for 29s

The given statement is a conditional: If 87920384487 is prime (hypothesis), then the Goldbach conjecture holds (conclusion).

To determine if this conditional statement is true, recall that in logic, "If P, then Q" is true in all cases except when P is true and Q is false.

Here, first check if the hypothesis P is true (i.e., if 87920384487 is prime). To do so, test for divisibility by small primes. The sum of its digits is $8 + 7 + 9 + 2 + 0 + 3 + 8 + 4 + 4 + 8 + 7 = 60$, which is divisible by 3 (since $60 \div 3 = 20$). Therefore, 87920384487 is also divisible by 3 and greater than 3, so it is not prime. (Explicitly, $87920384487 \div 3 = 29306794829$.)

Since the hypothesis P is false, the conditional statement is true regardless of whether the conclusion Q (the Goldbach conjecture holds) is true or false. This is known as a vacuous truth.

Thus, yes, the statement is true.

实质蕴涵

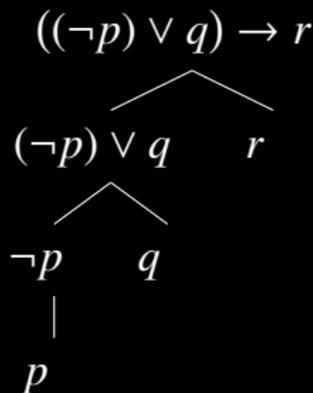
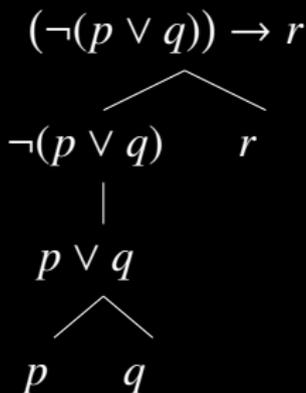
例（“哥德巴赫猜想”）

This is a number theory question. If 87920384487 is prime, then Goldbach conjecture holds. Is this true?

- 提交形式化：<https://www.logicbench.cn/>

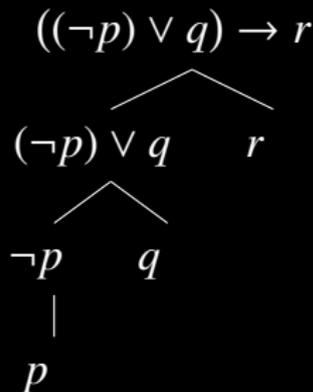
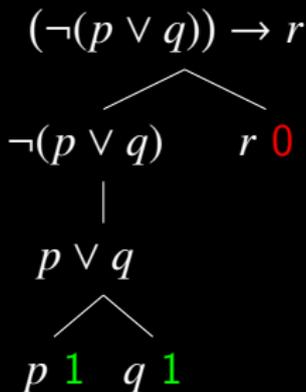
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



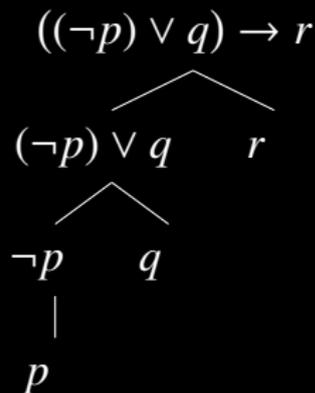
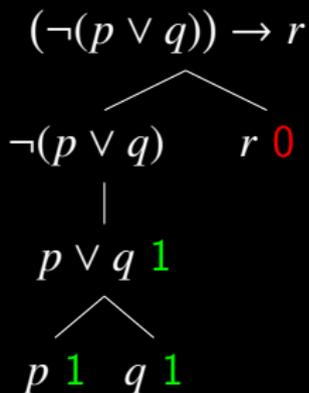
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



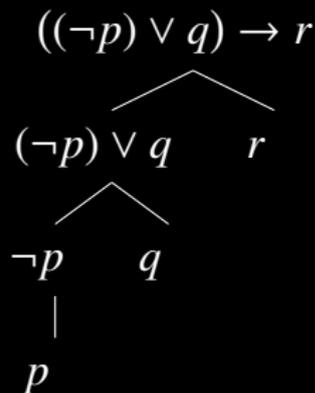
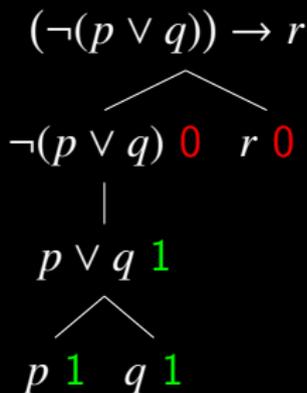
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



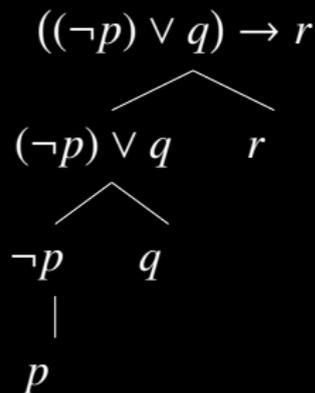
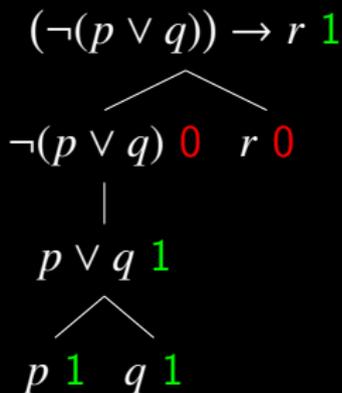
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



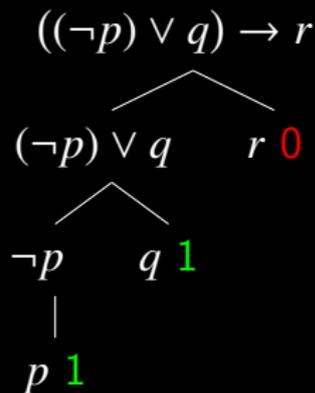
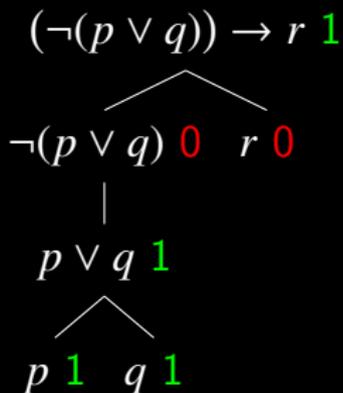
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



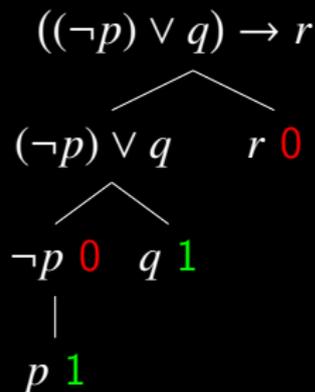
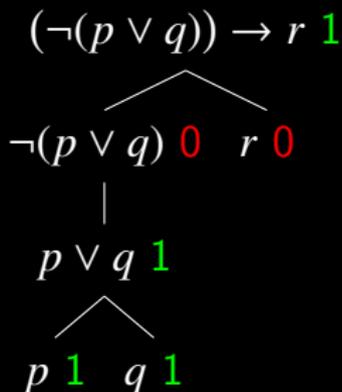
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



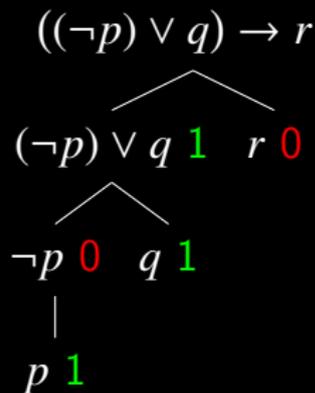
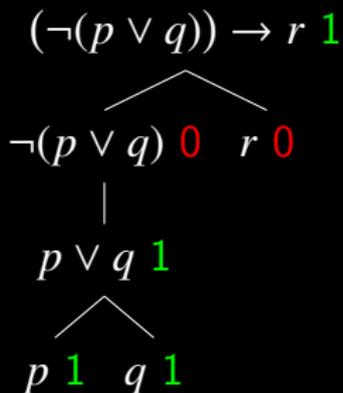
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



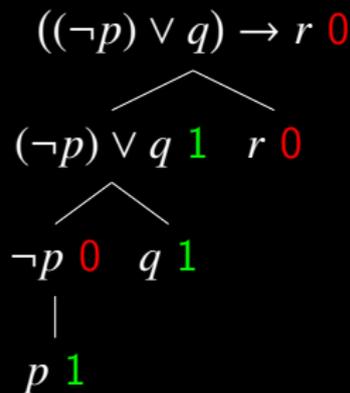
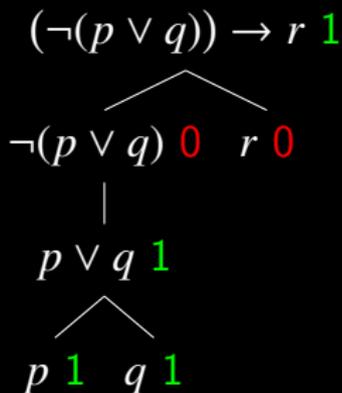
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



利用真值表计算

p	q	r	$(\neg(p \vee q)) \rightarrow r$	$((\neg p) \vee q) \rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

利用真值表计算

p	q	r	$(\neg(p \vee q)) \rightarrow r$	$((\neg p) \vee q) \rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

利用真值表计算

回忆：一个命题逻辑的 **语义情形** 是一个函数 V 。例如：

$$V(p) = 1, V(q) = 1, V(r) = 0$$

根据真值表，我们可以把 V 扩张为对任意只含有命题符号 p, q, r 的公式的赋值，例如：

- $V((\neg(p \vee q)) \rightarrow r) = 1$
- $V(((\neg p) \vee q) \rightarrow r) = 0$

利用真值表计算

回忆：一个命题逻辑的 **语义情形** 是一个函数 V^{110} 。例如：

$$V^{110}(p) = 1, V^{110}(q) = 1, V^{110}(r) = 0$$

根据真值表，我们可以把 V 扩张为对任意只含有命题符号 p, q, r 的公式的赋值，例如：

- $V^{110}((\neg(p \vee q)) \rightarrow r) = 1$
- $V^{110}(((\neg p) \vee q) \rightarrow r) = 0$

命题逻辑的有效推理

定义

任给命题逻辑公式 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和 ψ , 我们说 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 到 ψ 的推理是有效的 或 ψ 是 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的 (有效) 推论 (consequence), 当且仅当对任意赋值函数 V , 若 $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$, 则 $V(\psi) = 1$ 。

命题逻辑的有效推理

定义

任给命题逻辑公式 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和 ψ , 我们说 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 到 ψ 的推理是有效的 或 ψ 是 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的 (有效) 推论 (consequence), 当且仅当对关于 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和 ψ 中出现命题符号的任意赋值函数 V , 若 $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$, 则 $V(\psi) = 1$ 。

命题逻辑的有效推理

定义

任给命题逻辑公式 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和 ψ , 我们说 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 到 ψ 的推理是有效的 或 ψ 是 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的 (有效) 推论 (consequence), 当且仅当对关于 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和 ψ 中出现命题符号的任意赋值函数 V , 若 $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$, 则 $V(\psi) = 1$ 。此时, 我们记

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vDash \psi$$

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vDash \neg\varphi$$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vDash \neg\varphi$$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \vDash \neg\psi$$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \vDash \neg\psi$$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

命题逻辑的有效推理

有效推理有一个对偶的概念：**可满足性**

定义

我们称一集命题逻辑公式 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 是**可满足**的 (satisfiable), 当且仅当存在一个赋值函数 (语义情形) V , 使得每个 $V(\varphi_i) = 1$ ($i = 1, \dots, n$)

命题逻辑的有效推理

不难看出,

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vDash \psi$$

当且仅当

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

不是可满足的

重言式

定义

我们用 $\models \varphi$ 表示 **空集** $\emptyset \models \varphi$, 也即 $\{\neg\varphi\}$ 不可满足。此时, 我也称 φ 是 **重言式** (tautology)。

重言式

例 (几则常见的重言式)

■ $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

(非) 矛盾律

■ $\varphi \vee \neg\varphi$

排中律

■ $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

双重否定

重言式

例 (几则常见的重言式)

■ $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

德摩根律

(De Morgan laws)

■ $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

分配律

重言式

根据定义不难看出，所有有效的推理可以被“编码”为重言式

事实

任给公式 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 和 ψ ,

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vDash \psi \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi \text{ 是重言式}$$

翻译与形式化

四川麻将与和牌

背景：在一局四川麻将中，有条、万、筒三种牌型，当手中的牌为 $(abc)*x+(aaa)*y+(aa)*1$ ， $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $x+y=4$ ，且手牌中最多有两个牌型时即为胡牌。特别说明：杠虽有四张但实际上属于 aaa ，即视为三张。

翻译与形式化

四川麻将与和牌

问题：在一局四人麻将中，你的手牌为“么鸡、二条、三条、七条、八条、九条、四筒、五筒、五筒、五筒、六筒、七筒、八筒”，且本局你没有碰、杠。你摸到一张一万后还剩 3 张牌没有被摸，已知你的上家碰了六筒，杠了九筒和三筒，牌池中中有 3 张四筒、1 张五筒，请问在什么情况下你能胡牌？

翻译与形式化

四川麻将与和牌——一个形式化努力

翻译：

- xAi 表示： x 张 Ai 已被打出（即不在牌山也不在手牌中。 A 、 B 、 C 表示牌型， i 表示数字）
- qAi 表示：有一张手牌 Ai
- R 表示：手牌的牌型小于等于 2
- W 表示：和牌

.....

翻译与形式化

四川麻将与和牌——一个形式化努力

一些前提:

- $qA1 \wedge qA2 \wedge qA3 \wedge qA7 \wedge qA8 \wedge qA9 \wedge qC4 \wedge qC5 \wedge$
 $qC5 \wedge qC5 \wedge qC6 \wedge qC7 \wedge qC8$

- $3C4 \wedge 1C5 \wedge 3C6 \wedge 4C9$

- $((\dots) \vee \dots \vee (\dots)) \rightarrow R \rightarrow W$

.....

翻译与形式化

四川麻将与和牌——该形式化的一些问题

- 自然语言中隐含的规则：麻将中每种牌型有 4 张。形式化中，所有必要的前提都要显式地写出（否则形式化的推理往往不是有效的）
- 命题逻辑中的命题无法承载复杂的语义，如数量。我们可以用更多的基本命题.....

翻译与形式化

为了批量引入基本命题符号，批量定义对它们的翻译。我们可以约定一个“下标系统” (index system)：

- 我们用 $P[X_1, \dots, X_n]$ 表示所有以 n 元组 (x_1, \dots, x_n) (其中每个 $x_i \in X_i$) 为下标的基本命题符号组成的集合。这里, X_i 是下标集合。 $[X_1, \dots, X_n]$ 是下标集的序列 (array)。
- 我们约定一些下标集：
 - 自然是 n 表示下标集 $\{1, \dots, n\}$
 - \mathbb{N} 表示自然数集

翻译与形式化

为了批量引入基本命题符号，批量定义对它们的翻译。我们可以约定一个“下标系统” (index system)：

- 我们也可以像这样自定义下标集合：

$P[\mathbb{N}, \{A, B, C\}, 9, 4, \{\text{东, 南, 西, 北, 山, 池}\}]$

- 在规定如何批量翻译的时候，需要指定一些变元，例：

$P_{i \in \mathbb{N}, X \in \{A, B, C\}, j, 9, k, 4, Y \in \{\text{东, 南, 西, 北, 山, 池}\}}$ 表示“在牌局进行到第 i 步时，第 k 张 X_j 牌在 Y 这个位置”

翻译与形式化

- 在形式化的时候，可能也需要表示一批公式。为此可能要用到多个同一种类的变元我们可以给变元加下标以示区分。例如，我们可以说：对任意 $i, Y, X_1, \dots, X_5, j_1, \dots, j_5, k_1, \dots, k_{14}$ (且 k_1, k_2, k_3 两两不同, $\dots, k_{13} \neg k_{14}$)，我们有前提：

$$(P_{i,X_1,j_1,k_1,Y} \wedge P_{i,X_1,j_1,k_2,Y} \wedge P_{i,X_1,j_1,k_3,Y} \wedge \dots \wedge P_{i,X_4,j_4,k_{10},Y} \\ \wedge P_{i,X_4,j_4,k_{11},Y} \wedge P_{i,X_4,j_4,k_{12},Y} \wedge P_{i,X_5,j_5,k_{13},Y} \wedge P_{i,X_5,j_5,k_{14},Y}) \rightarrow W_{东}$$

翻译与形式化

3x3 数独求解更完整的形式化

练习与讨论

计算并构造下列公式的真值表

1 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

2 $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$

练习与讨论

不考虑括号省略规则，利用真值表分析通过在不同的位置插入括号，下面的符号串可以被解释为那几个不同义的命题逻辑公式？

$$\neg p \rightarrow q \vee r$$

练习与讨论

利用真值表判断下面两个判断是否成立

■ $\neg p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vDash p \wedge r$

■ $\neg p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vDash p \vee r$

练习与讨论

利用真值表判断下面两个判断是否成立

■ $p \rightarrow (q \wedge r), \neg q \vDash \neg p$

■ $p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vDash \neg p$

练习与讨论

给出下列公式的真值表

- $(p \vee q) \vee \neg(p \vee (q \wedge r))$

- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- $((p \leftrightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)) \leftrightarrow (\neg(p \leftrightarrow r) \rightarrow q)$

练习与讨论

我们称两个公式 φ 和 ψ 是 **逻辑等价的** (logically equivalent, 记作 $\varphi \vDash \psi$), 当且仅当 $\varphi \vDash \psi$ 且 $\psi \vDash \varphi$ 。利用真值表判断下面的公式对是否是逻辑等价的。

- $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ 和 $\varphi \vee \neg\psi$
- $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ 和 $\varphi \wedge \neg\psi$

练习与讨论 *

一个含有 n 个命题符号的命题逻辑公式的真值表可以看作是一个 n 元函数。

例

假设 $\alpha = ((\neg p) \vee q) \rightarrow r$, 定义 B_α 函数, 满足对每个赋值 V 都有

$$B_\alpha(V(p), V(q), V(r)) = V(\alpha)$$

练习与讨论 *

- 1 函数 B_α 的定义域是什么?
- 2 是否存在不同的公式 α, β 使得 B_α 和 B_β 是相同的函数
- 3 考虑至多含有 n 个命题符号的公式 α , 有多少不同的 B_α ?