逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2025 年秋季

课程信息

- 时间地点：
  - 周四 13:30 - 15:10，H3409 （讲座课）
  - 周四（双周）15:25-17:05，H3409 （讨论课）
- 网站：https://web.yangruizhi.cyou/logic2025/
- 教材：尚无

课程团队

- 杨睿之：yangruizhi@fudan.edu.cn
- 李想：22210160027@m.fudan.edu.cn
- 余子康
- 董金锐、彭祈元、沈钰炯

……

考核

- 平时：习题
  - 自然语言推理的形式化
- 期末：闭卷
  - 时间：2025-12-31 08:30 - 10:30
  - 地点：待定

关于这门课

目前的计划

- 讲座课：逻辑学导论
  - 逻辑学的基本知识与技巧
  - 逻辑学的应用
- 讨论课：类型论与自动定理证明（Lean4）

前情提要

- 课程的目的：逻辑学的系统知识与应用。与“数理逻辑”不同，我们会有更多的现象更少的“代码”；与“批判性思维”不同，我们会有成体系的逻辑系统
- 逻辑简史：
  - 古希腊：麦加拉-斯多葛学派、亚里士多德
  - 现代：莱布尼茨、布尔、弗雷格、希尔伯特、塔斯基、哥德尔
- 逻辑的哲学：逻辑是关于推理的，论辩的，真的还是证明的？逻辑学是客观规律还是人为规定抑或一种工具？

生活中的逻辑

例 (服务员上菜)

假设你（C）和你的两位同学（A、B）在小饭馆收银台点餐。你要了鱼香肉丝盖饭，A 要了扬州炒饭，B 点了猪肝面。你们拿上桌牌挑了张桌子坐下了。不一会儿另一位服务员端着三份饭菜上来了。

生活中的逻辑

例 (服务员上菜)

服务员问：“谁要的鱼香肉丝?”你举了手，服务员把盖浇饭端到你面前。服务员又问“谁点的炒饭?”A 示意是她。服务员分别为 A 和 B 端上了炒饭和面。

生活中的逻辑

例 (手机无法充电)

墙上插着充电器电源，电源上插着 USB 线并连接到手机 USB Type-C 接口，然而手机没有在充电。

生活中的逻辑

例 (手机无法充电)

- 更换室友的电源后，你的手机仍然没有在充电
- 换了室友的手机接上，她的手机也没有在充电
- 你买了根 USB 线

生活中的逻辑

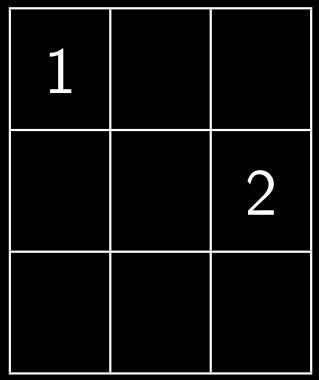
例 (3×3 数独)

规则：

- 每个格子内只能填数字 1-3
- 每行每列都不能有重复的数字

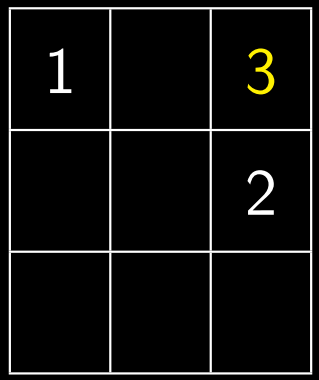
生活中的逻辑

例 (3×3 数独)



生活中的逻辑

例 (3×3 数独)



生活中的逻辑

例 (3×3 数独)

1		3
3		2

生活中的逻辑

例 (3×3 数独)

1	2	3
3		2
		1

生活中的逻辑

例 (3×3 数独)

1	2	3
3	1	2
2		1

生活中的逻辑

例 (3×3 数独)

1	2	3
3	1	2
2	3	1

生活中的逻辑

这三个例子中，有什么共性吗？

- 盖浇饭或炒饭或面，非盖浇饭，非炒饭 $\Rightarrow$ 面
- 电源坏或线坏或手机坏，电源没坏，手机没坏 $\Rightarrow$ 线坏
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 3

生活中的逻辑

这三个例子中，有什么共性吗？

- 盖浇饭或炒饭或面，非盖浇饭，非炒饭 $\Rightarrow$ 面
- 电源坏或线坏或手机坏，电源没坏，手机没坏 $\Rightarrow$ 线坏
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 3

生活中的逻辑

这三个例子中，有什么共性吗？

- 盖浇饭或炒饭或面，非盖浇饭，非炒饭 $\Rightarrow$ 面
- 电源坏或线坏或手机坏，电源没坏，手机没坏 $\Rightarrow$ 线坏
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 3

生活中的逻辑

这三个例子中，有什么共性吗?

- 盖浇饭或炒饭或面，非盖浇饭，非炒饭 $\Rightarrow$ 面
- 电源坏或线坏或手机坏，电源没坏，手机没坏 $\Rightarrow$ 线坏
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 3

更多的推理

如果你吃了药，你就会好的

你吃了药

你好了

更多的推理

如果你吃了药，你就会好的

你好了

你吃了药

更多的推理

如果你吃了药，你就会好的

你没吃药

你好不了

更多的推理

如果你吃了药，你就会好的

你没有好

你没吃药

更多的推理

如果我翘课，我会挂科

我没有翘课

我不会挂科

推理的有效与无效

显然，有的推理“对劲”，有的“不对劲”

约定

如果一个推理（inference）总是能够在前提（premise）皆为真的情况下得到结论（conclusion）的真，我们称这个推理是 有效的 （valid）

推理的有效与无效

换句话说，有效的推理不存在 反例 （counter-example），即前提皆真而结论为假的情况。

后一种情况下，我们称这个推理是 无效的 （invalid）

推理的有效与无效

等一下，

- 我们这里说的 推理 到底是什么东西？

  是若干句话？是他们表述的事实？

- 我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

推理的有效与无效

等一下，

- 我们这里说的 推理 到底是什么东西？

  是若干句话？是他们表述的事实？
- 我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

推理的有效与无效

等一下，

- 我们这里说的 推理 到底是什么东西？

  是若干句话？是他们表述的事实？
- 我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

推理的有效与无效

回忆：

如果你吃了药，你就会好的

你好了

你吃了药

推理的有效与无效

回忆：

如果你吃了药，你就会好的 —真

你好了 —真

你吃了药 —真

推理的有效与无效

回忆：

如果你吃了药，你就会好的 —假

你好了 —真

你吃了药 —假

推理的有效与无效

回忆：

如果你吃了药，你就会好的	—真
你好了	—真
你吃了药	—假

推理的有效与无效

- 首先，我们关心的是一些命题，这些命题分为若干前提和一个结论，它们可真可假，但它们真假情况可能有某种限制。

推理的有效与无效

例

例如，一个由两则前提和一则结论组成的推理，可以表示为

$$\frac{P_1, P_2}{C}$$

这里涉及的 3 个命题至多有 ? 种真假组合

推理的有效与无效

例

例如，一个由两则前提和一则结论组成的推理，可以表示为

$$\frac{P_1, P_2}{C}$$

这里涉及的 3 个命题至多有 8 种真假组合

推理的有效与无效

例

但如果我们让 P_1、P_2、C 分别是：

P_1：如果你吃了药，你就会好的

P_2：你吃药了

C：你好了

我们似乎不再有全部 8 种真假组合了？

推理的有效与无效

在一个有效的推理中，我们考虑前提、结论命题所有可能的真假组合，在其中每一个组合中

- 如果所有前提是真的，那么结论也是真的
- 如果结论是假的，前提中至少有一则命题是假的

推理的有效与无效

因此，一个有效的推理能帮助我们

- 给定你接受的一些事实，告诉你必须也接受什么
- 反驳：如果你能证明一个有效推理的结论是错的，那么它的前提中至少有一条是错的

推理的有效与无效

假设下面这些推理都是有效的，假设你现在知道 A 是真的而 G 是假的

例

$$\dfrac{\dfrac{A \quad \dfrac{A \quad B \quad C}{D}}{E} \quad \dfrac{\dfrac{E}{F} \quad \dfrac{A}{B}}{}}{G}$$

你知道 B, C, D, E, F 的真假吗?

推理的有效与无效

假设下面这些推理都是有效的，假设你现在知道 A 是真的而 G 是假的

例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad B \quad C}{D}}{E} \quad \dfrac{\dfrac{E}{F} \quad \dfrac{A}{B}}{A}}{G}$$

你知道 B, C, D, E, F 的真假吗?

推理的有效与无效

假设下面这些推理都是有效的，假设你现在知道 A 是真的而 G 是假的

例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad B \quad C}{D}}{E} \quad \dfrac{\dfrac{E}{F} \quad \dfrac{A}{B}}{A}}{G}$$

你知道 B, C, D, E, F 的真假吗?

推理的有效与无效

回忆问题：我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

回忆：一个有效推理中命题的真假组合有所限制，如：

再看：

如果你吃了药，你就会好的 你吃药了	如果你不吃药，那么你不会好 你好了
你好了	你吃药了

推理的有效与无效

回忆问题：我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

回忆：一个有效推理中命题的真假组合有所限制，如：

再看：

如果你吃了药，你就会好的	如果你不吃药，那么你不会好
你吃药了	你好了
你好了	你吃药了

推理的有效与无效

回忆问题：我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

回忆：一个有效推理中命题的真假组合有所限制，如：

再看：

如果我翘课，我会挂科

我翘课了

我挂科了

如果你不吃药，那么你不会好

你好了

你吃药了

推理的有效与无效

回忆问题：我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

回忆：一个有效推理中命题的真假组合有所限制，如：

再看：

如果我翘课，我会挂科

我翘课了

我挂科了

如果你不吃药，那么你不会好

你好了

你吃药了

推理的有效与无效

回忆问题：我们说的有效与无效指的是推理哪方面的属性？

回忆：一个有效推理中命题的真假组合有所限制，如：

再看：

如果我翘课，我会挂科

我翘课了

我挂科了

如果丘处机没有路过牛家村，那么大宋不会亡

大宋亡了

丘处机路过了牛家村

推理的有效与无效

约定

前一页的例子中，我们说左边的两个推理和右边的两个推理分别有各自同样的 样式 （pattern）或 形式 （form），而左边和右边的推理（虽然都是有效的）有不同的 样式 / 形式

推理的有效与无效

- 两个样式相同的推理要么都是有效的，要么都是无效的
- 逻辑学起源的重要标志即发现与推理有效性相关的主要是形式
- 相对地，为保持形式（从而保持有效性），推理中一些内容是可替换的，另一些则不行。

符号的使用

为了表示推理的形式，人们尝试用简单的符号来指代那些可替换的内容。例如，用 p 指代“我吃药”或“我翘课”，用 q 指代“我好了”或“我挂科”。容易发现这两个推理有同样的形式。

如果你吃了药，那么你就会好的	如果 p，那么 q
你吃药了	p
你好了	q

符号的使用

为了表示推理的形式，人们尝试用简单的符号来指代那些可替换的内容。例如，用 p 指代“我吃药”或“我翘课”，用 q 指代“我好了”或“我挂科”。容易发现这两个推理有同样的形式。

如果你吃了药，那么你就会好的	如果 p，那么 q
你吃药了	p
你好了	q

符号的使用

为了表示推理的形式，人们尝试用简单的符号来指代那些可替换的内容。例如，用 p 指代“我吃药”或“我翘课”，用 q 指代“我好了”或“我挂科”。容易发现这两个推理有同样的形式。

如果我翘课，那么我会挂科	如果 p，那么 q
我翘课了	p
我挂科了	q

符号的使用

为了表示推理的形式，人们尝试用简单的符号来指代那些可替换的内容。例如，用 p 指代“我吃药”或“我翘课”，用 q 指代“我好了”或“我挂科”。容易发现这两个推理有同样的形式。

如果你吃了药，那么我会挂科	如果 p，那么 q
你吃药了	p
我挂科了	q

符号的使用

我们可以说，例如

- (形如）从“如果 p，那么 q”和“p”到“q”的推理是有效的
- (形如）从“如果 p，那么 q”和“非 p”到“非 q”的推理是无效的

符号的使用

借助符号的使用也让我们更容易发现，这几种形式的推理（虽然涉及 3 个命题）只关心 2 个“基本”命题的真假，即 p 和 q 的真假。而 p 和 q 的真假组合只有 4 种情况。所以，对于这种形式的推理， 有效性 / 无效性 的涵义可以更精确地表述为

在 p、q 两个基本命题所有 4 种真假组合的情况下，凡是前提均为真的情况，结论亦为真

推理的形式化

- 形式化能帮助我们判断推理的有效性
- 要把有实际内容的例子形式化，往往需要规定一个从自然语言到形式语言的翻译。

推理的形式化

例（“服务员上菜”的形式化）

- 自然语言到形式语言的翻译:
  - p：B 点的鱼香肉丝盖饭
  - q：B 点的扬州炒饭
  - r：B 点的猪肝面
- 形式语言版本：

$$(p \vee q \vee r, \neg p, \neg q \vDash r)$$

推理的形式化

例（“手机无法充电”的形式化）

- 自然语言到形式语言的翻译:
  - p：坏的是电源
  - q：坏的是手机
  - r：坏的是 USB 线
- 形式语言版本：

  $(p \vee q \vee r, \neg p, \neg q \vDash r)$

推理的形式化

例 (“3×3 数独”的形式化)

- 自然语言到形式语言的翻译:
  - p 右上角填 1
  - q 右上角填 2
  - r 右上角填 3
- 形式语言版本:

  $(p \vee q \vee r, \neg p, \neg q \vDash r)$

推理的形式化

例（“3×3 数独”更完整的形式化）

- 自然语言到形式语言的翻译:
  - 对任意自然是 $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$，令 p_{ijk} 表示第 i 行第 j 列那格填数字 k
- 形式语言版本：
  - 对任意 $i, j \in \{1, 2, 3\}$，$(p_{ij1} \wedge \neg p_{ij2} \wedge \neg p_{ij3}) \vee (\neg p_{ij1} \wedge p_{ij2} \wedge \neg p_{ij3}) \vee (\neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij2} \wedge p_{ij3}) \in \Lambda$

推理的形式化

例（“3×3 数独”更完整的形式化）

- 自然语言到形式语言的翻译:
  - 对任意自然是 $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$，令 p_{ijk} 表示第 i 行第 j 列那格填数字 k
- 形式语言版本：
  - 对任意 i_1, i_2, j_1, j_2 和 $k \in \{1, 2, 3\}$，但凡 $i_1 = i_2$ 且 $j_1 \neq j_2$ 或 $i_1 \neq i_2$ 且 $j_1 = j_2$，就有 $p_{i_1 j_1 k} \to \neg p_{i_2 j_2 k} \in \Lambda$

推理的形式化

例（“3×3 数独”更完整的形式化）

- 自然语言到形式语言的翻译:
  - 对任意自然是 $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$，令 p_{ijk} 表示第 i 行第 j 列那格填数字 k
- 形式语言版本：
  - $p_{111} \wedge p_{232} \in \Lambda$
  - $\Lambda \vDash p_{133}$

练习与讨论

长期（每人 10 条）

寻找自然语言书写的日常生活、交流、思考中遇到的逻辑学现象，尝试形式化其中的逻辑推理。要求提供：

- 自然语言书写的场景（背景）、问题与答案
- 自然语言到形式语言的翻译
- 形式语言书写的逻辑推理

练习与讨论

- 回忆“服务员上菜”这个例子。对服务员来说，一开始可能的点菜情况有哪些？当你（C）回答后，发生了什么？当 A 回答后又发生了什么？

- 回忆“3×3 数独”的例子。当我们把右边格子中“2”拿走后，它还是不是一道数独题？为什么？有多少种符合规则的填满的 3×3 格子？

1		
		2

练习与讨论

逻辑不仅能帮助我们解数独，也能帮助我们构造数独题。

任给一个填满的符合规则的 9×9 格子，我们从中随机拿走一个格子中的数字。它就是一道数独题，只是过于简单。此时，我们再随机拿走一个格子中数字……当我们拿走一个数字后它不再是唯一解了，我们可以考虑把它放回去，这时我们可能已经得到了一个不错的数独题。当然，我们在放回去后还可以再尝试随机拿走别的格子中的数字……直到我们当我们拿走剩余任何一个格子中的数字都无法保证唯一解时，我们就得到了一个有挑战的数独题。

你能聊聊其中的逻辑吗？

附：经典数独的规则

- 一般由 9 个 3×3 个的九宫格组成。
- 每一列的数字均须包含 $1 \sim 9$，不能缺少，也不能重复。
- 每一宫（粗黑线围起来的区域，通常是 3×3 的九宫格）的数字均须包含 $1 \sim 9$，不能缺少，也不能重复。

试试?

	2			3		9		7
	1							
4		7				2		8
		5	2				9	
			1	8		7		
	4				3			
				6			7	1
	7							
9		3		2		6		5