

# 模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

# 课程信息

- 时间地点:

- 周二 18:30 - 20:10, HGX201

- 网站:

<https://web.yangruizhi.cyou/modal2024/>

- 教材: Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde

Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002

- 考试形式: 开卷

# 回顾：命题逻辑

命题逻辑语言的符号：

- 可数无穷多个 **命题变元符号**： $p_0, p_1, p_2, \dots$
- 命题常数符号： $\perp$  (Bottom) ,  $\top$  (Top)
- **联词**： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **辅助符号**： $(, )$

# 回顾：命题逻辑

## 命题逻辑合式公式

- 每个命题变元符号、命题常数符号都是 **合式公式**
- 若  $\phi, \psi$  是合式公式, 那么  
 $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$  也是 **合式公式**

## 记法

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi$$

# 回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (真值指派)

我们说  $V$  是一个 **真值指派**，当且仅当  $V$  是以由命题符号组成的集合  $\mathcal{A}$  为定义域、以**真值集合**  $\{0, 1\}$  为值域的函数

$$V : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$$

# 回顾：命题逻辑

## 命题逻辑的语义

### 定义 (命题联词的语义)

任给真值指派  $V$ , 我们定义  $V$  的扩展  $\bar{V} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

- 0 对  $p \in \mathcal{A}$ ,  $\bar{V}(p) = V(p)$ ,  $\bar{V}(\perp) = 0$ ,  $\bar{V}(\top) = 1$
- 1 对任意公式  $\phi, \psi$ ,

$$\bar{V}(\neg\phi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

# 回顾：命题逻辑

## 命题逻辑的语义

### 定义 (命题联词的语义)

任给真值指派  $V$ , 我们定义  $V$  的扩展  $\bar{V} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对  $p \in \mathcal{A}$ ,  $\bar{V}(p) = V(p)$ ,  $\bar{V}(\perp) = 0$ ,  $\bar{V}(\top) = 1$

1 对任意公式  $\phi, \psi$ ,

$$\bar{V}(\phi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 1 \text{ 或者 } \bar{V}(\psi) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

# 回顾：命题逻辑

命题逻辑公理系统：

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

- 推演规则：分离规则



# 回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑语言符号：

- 命题联词： $\neg, \rightarrow$
- 量词： $\forall, \exists$
- 变元： $v_1, v_2, \dots$
- 常数符号： $c_1, c_2, \dots$
- 函数符号： $f_1, f_2, \dots$
- 谓词符号： $P_1, P_2, \dots$
- 等词： $\approx$

# 回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑的公理系统：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式  $\alpha^P$  是重言式的一阶逻辑公式  $\alpha$
- 2  $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ , 其中项  $t$  可以在  $\alpha$  中无冲突地替代  $x$
- 3  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4  $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ , 其中变元  $x$  不在  $\alpha$  中自由出现
- 5  $x \approx x$
- 6  $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$ , 其中  $\alpha$  为原子公式, 且  $\alpha'$  是将  $\alpha$  中若干个  $x$  的出现替换为  $y$  所得到的公式

# 回顾：一阶谓词逻辑

## 一阶逻辑的语义

- 结构:  $\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_k^{\mathfrak{A}})$
- 赋值:  $s : \mathcal{V} \rightarrow |\mathfrak{A}|$

# 回顾：一阶谓词逻辑

## 一阶逻辑的语义

### ■ 塔斯基真定义：

#### ■ $\alpha$ 是原子公式

■  $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 \approx t_2$  , 当且仅当  $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

■  $(\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \dots t_n$  , 当且仅当  $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

■  $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$  , 当且仅当  $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$

■  $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \rightarrow \gamma$  , 当且仅当或者  $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$  或者  $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$

# 回顾：一阶谓词逻辑

## 一阶逻辑的语义

### ■ 塔斯基真定义：

- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$  , 当且仅当对任何  $d \in |\mathfrak{A}|$  , 有  $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \beta$   
其中  $s_d^x$  是通过将  $s$  改造得到的  $\mathfrak{A}$ -赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

# 回顾

命题逻辑与一阶逻辑的可靠性与完全性：

$$\Sigma \vdash \phi \Leftrightarrow \Sigma \models \phi$$

注意：命题逻辑是可判定的，一阶谓词逻辑不是可判定的

# 回顾

## “定义”

- 命题逻辑的定义：一个命题逻辑公式  $\phi$  “定义” 了一个布尔函数  $B_\phi$
- 一阶逻辑语句定义结构类
- 一阶谓词逻辑公式在结构中定义结构论域上的集合、关系、函数

## 同构与初等等价

# 回顾

经典逻辑（命题逻辑、一阶谓词逻辑）刻画的是“真”这个模态词

- 模态逻辑可以被用来刻画更多的模态词，如：可能/必然，将来/过去，知道，应该/允许，等等
- 模态（命题）逻辑是命题逻辑的扩张，是二阶谓词逻辑的片断



# 模态逻辑的语言

## 定义 (基本模态语言)

我们定义基本模态语言 (basic modal language) 为:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \diamond\phi$$

基本模态逻辑的语言在命题逻辑的基础上添加了一个——  
元模态词 (modal operator):  $\diamond$  (Diamond)

# 模态逻辑的语言

## 记法

我们规定如下缩写：

$$\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi \quad (\text{Box})$$

$$\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

$$\top := \neg\perp$$

# 模态逻辑的语言

## 例

一般将  $\diamond\phi$  读作“ $\phi$  是可能的”， $\Box\phi$  即  $\neg\diamond\neg\phi$  则表示“非  $\phi$  是不可能的”，也即“ $\phi$  是必然的”。尝试翻译：

■  $\Box\phi \rightarrow \diamond\phi$

■  $\phi \rightarrow \diamond\phi$

■  $\phi \rightarrow \Box\diamond\phi$

■  $\diamond\phi \rightarrow \Box\diamond\phi$

# 模态逻辑的语言

## 例

在认知逻辑 (epistemic logic) 中,  $\Box\phi$  常被写作  $K\phi$ , 读作“(某人) 知道  $\phi$ ”

- $K\phi \rightarrow \phi$
- $K\phi \rightarrow KK\phi$

# 模态逻辑的语言

## 例

在可证性逻辑 (provability logic) 中  $\Box\phi$  读作 “ $\phi$  是可证的”

- $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

- $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$  (Löb' formula)

## 定理 (Löb 定理)

若  $PA \vdash \text{Prov}_{PA}(\phi) \rightarrow \phi$ , 则  $PA \vdash \phi$

# 模态逻辑的语言

## 定义 (模态语言类型)

一个 **模态语言类型** (modal similarity type) 是一个有序对  $\tau = (O, \rho)$ , 其中  $O$  是模态词的集合, 非空。  $\rho : O \rightarrow \mathbb{N}$  告诉我们每个模态词是几元的。

给定命题变元符号集  $\Phi$  和模态语言类型  $\tau = (O, \rho)$ , 唯一决定了模态逻辑语言  $ML(\tau, \Phi)$  :

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Delta(\phi_1, \dots, \phi_{\rho(\Delta)})$$

其中  $p \in \Phi$ 、  $\Delta \in O$ 。用  $Form(\tau, \Phi)$  表示该语言的公式集

# 模态逻辑的语言

## 例

基本时态逻辑：有两个一元模态词  $O = \{F, P\}$ 。  $F$  和  $P$  类似  $\diamond$  算子。  $F\phi$  常读作“在未来某个时刻  $\phi$  (成立)”，  $P\phi$  读作“在过去某个时刻  $\phi$ ”。通常定义  $G\phi := \neg F\neg\phi$ ，表示“未来总是  $\phi$ ”；定于  $H\phi := \neg P\neg\phi$ ，表示“过去一直  $\phi$ ”。

- $P\phi \rightarrow GP\phi$

- $F\phi \rightarrow FF\phi$

- $GFp \rightarrow FGp$

(Mckinsey formula)

# 模态逻辑的语言

## 例

时态逻辑可以加入更丰富的模态词，如二元模态词  $U(\phi, \psi)$ ，读作“ $\psi$  直到  $\phi$ ” ( $\psi$  until  $\phi$ )，二元模态词  $S(\phi, \psi)$ ，读作“自从  $\phi$ ,  $\psi$ ” ( $\psi$  since  $\phi$ )

- $F\phi \leftrightarrow U(\phi, \top)$ ,  $P\phi \leftrightarrow S(\phi, \top)$



# 模态逻辑的语言

## 定义 (代入)

给定模态逻辑语言  $ML(\tau, \Phi)$ , 一个该语言的 **代入** (substitution) 是一个函数  $\sigma : \Phi \rightarrow Form(\tau, \Phi)$ 。一个代入可以被扩张到定义在全体公式集上的函数

$(\cdot)^\sigma : Form(\tau, \Phi) \rightarrow Form(\tau, \Phi)$ :

# 下期预告

模型与框架