

可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 可计算支配的与超免疫的
 - 集合 X 不是可计算支配的, 当且仅当 X 是超免疫度的
 - 集合 X 是可计算支配的, 则 $f \leq_T X \Rightarrow f \leq_{tt} X$
 - $A \leq_T 0'$ 且不可计算, 则 A 是超免疫度的

前情回顾

- 集合 A 是 high_n 的, 当且仅当 $0^{(n+1)} \leq_T A^{(n)}$
- Δ_2^0 集合 A 是 high_n 的, 当且仅当 $A^{(n)} \equiv_T 0^{(n+1)}$
- 集合 A 是高效的, 当且仅当存在 $f \leq_T A$ 支配所有可计算函数

Post 问题

Post 问题

是否存在 c.e. 集合 A 有 $0 <_T A <_T 0'$

0 和 0' 之间的集合

记法

对集合 A, B , 我们用 $A|_T B$ 表示 $A \not\leq_T B$ 且 $B \not\leq_T A$

定理 (Post and Kleene)

存在集合 $A, B \leq_T 0'$ 有 $A|_T B$, 因而 $0 <_T A, B <_T 0'$

证明.

有穷扩张、对角线

单集

定义

- 一个 c.e. 的集合 A 是 **单集** (simple set), 当且仅当 $\mathbb{N} \setminus A$ 无穷且对每个无穷 c.e. 集合 W , $A \cap W \neq \emptyset$

事实

- 如果 A 是单集, 那么 $\mathbb{N} \setminus A$ 不是 c.e. 的, 因而 A 不是可计算的
- 如果 A 是低效的单集, 那么 $0 <_T A <_T 0'$

单集

事实

存在一个单集

- 证明 1: 枚举每个 W_e 中第一个 $\geq 2e$ 的元素
- 证明 2: 浮标法, 每个浮标 Γ_e 至多被移动有穷次

单集

事实

存在一个低效的单集 A , 因而 $0 <_T A <_T 0'$

证明.

(有穷损害优先方法)

习题

■ 1.5.21

下期预告

- Friedberg-Muchnik 定理
- Sacks Splitting Theorem
- 康托尔空间