逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

前情提要

谓词逻辑的语义

- 谓词逻辑的语义为谓词逻辑语言中的每个符号赋予意义
- 量词的意义由模型的论域赋予
- 谓词和常元意义由模型中的解释函数赋予
- (自由）变元的意义由变元赋值赋予
- 逻辑连接词的意义在塔斯基真定义中赋予

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

给定语言 $\mathcal{L}$，给定 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，给定变元赋值 $s : \mathcal{V} \to D$，我们对公式的构造递归地定义 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$

- 对原子公式 $Pt_1 \dots t_n$，$\mathcal{M} \vDash_s Pt_1 \dots t_n$，当且仅当 $([t_1]^I_s, \dots, [t_n]^I_s) \in P^I$，即 D 中元素 $[t_1]^I_s, \dots, [t_n]^I_s$ 之间有 P^I 关系

特别地，对等词 = （一个特别的 2 元谓词），$\mathcal{M} \vDash_s t_1 = t_2$，当且仅当 $[t_1]^I_s = [t_2]^I_s$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski’s defnition of truth）)

给定语言 $\mathcal{L}$，给定 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，给定变元赋值 $s : \mathcal{V} \to D$，我们对公式的构造递归地定义 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$

- 对原子公式 $Pt_1 \ldots t_n$，$\mathcal{M} \vDash_s Pt_1 \ldots t_n$，当且仅当 $([t_1]^I_s, \ldots, [t_n]^I_s) \in P^I$，即 D 中元素 $[t_1]^I_s, \ldots, [t_n]^I_s$ 之间有 P^I 关系

  特别地，对等词 $=$（一个特别的 2 元谓词），

  $\mathcal{M} \vDash_s t_1 = t_2$，当且仅当 $[t_1]^I_s = [t_2]^I_s$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

- 对公式的布尔组合:
  - $\mathcal{M} \vDash_s \neg\varphi$，当且仅当 并非 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \nvDash_s \varphi$
  - $\mathcal{M} \vDash_s \varphi \wedge \psi$，当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 且 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$
  - $\mathcal{M} \vDash_s \varphi \vee \psi$，当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$
  - $\mathcal{M} \vDash_s \varphi \rightarrow \psi$，当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 蕴含 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

- 对量词：
  - $\mathcal{M} \models_s \forall x\varphi$，当且仅当对任意 $d \in D$，都有 $\mathcal{M} \models_{s[x:=d]} \varphi$
  - $\mathcal{M} \models_s \exists x\varphi$，当且仅当存在 $d \in D$，使得 $\mathcal{M} \models_{s[x:=d]} \varphi$

谓词逻辑的语义

塔斯基真定义中对诸如合取式、析取式、蕴含式是否成立的定义似乎依赖于我们对并且、或、蕴含的直观理解。我们可以理解为定义告诉我们如何基于下述真值表判断组合公式是否可满足

$\mathcal{M} \vDash_s \varphi$	$\mathcal{M} \vDash_s \psi$	$\mathcal{M} \vDash_s \varphi \to \psi$
Yes	Yes	Yes
Yes	No	No
No	Yes	Yes
No	No	Yes

谓词逻辑的语义

塔斯基真定义中对诸如合取式、析取式、蕴含式是否成立的定义似乎依赖于我们对并且、或、蕴含的直观理解。我们可以理解为定义告诉我们如何基于下述真值表判断组合公式是否可满足

$\mathcal{M} \vDash_s \varphi$	$\mathcal{M} \vDash_s \psi$	$\mathcal{M} \vDash_s \varphi \to \psi$
Yes	Yes	Yes
Yes	No	No
No	Yes	Yes
No	No	Yes

谓词逻辑的语义

- 请观察：根据塔斯基真定义，如果变元赋值 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \models_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models_{s_2} \varphi$
- 虽然一个变元赋值 s 可以涉及对无穷个变元的赋值，实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个变元的赋值
- 上面的条件可以进一步放松为，“如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同”

谓词逻辑的语义

- 请观察：根据塔斯基真定义，如果变元赋值 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \vDash_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_{s_2} \varphi$
- 虽然一个变元赋值 s 可以涉及对无穷个变元的赋值，实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个变元的赋值
- 上面的条件可以进一步放松为，“如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同”

谓词逻辑的语义

- 请观察：根据塔斯基真定义，如果变元赋值 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \vDash_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_{s_2} \varphi$
- 虽然一个变元赋值 s 可以涉及对无穷个变元的赋值，实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个变元的赋值
- 上面的条件可以进一步放松为，“如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同”

谓词逻辑的语义

约定

有时候，人们用 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 指代一个其中至多含有自由变元 $x_1, \ldots, x_n$ 的公式。此时，人们会用

$$\mathcal{M} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

表示 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$，其中 s 满足 $s(x_1) = a_1, \ldots, s(x_n) = a_n$

谓词逻辑的语义

因此，如果 φ 是语句，那么或者对所有的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$，或者对所有的变元赋值 $\mathcal{M} \nvDash_s \varphi$

定义

假设 φ 是语句。如果对所有的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$，我们称 φ 在 $\mathcal{M}$ 中 真 ，记作 $\mathcal{M} \vDash \varphi$。

谓词逻辑的语义

继续观察: $\forall x(\exists yRyx \to Px)$ 是否成立是如何递归地依赖于其子公式 $\exists yRyx \to Px$ 是否成立的?

- 为了检验 $\forall x(\exists yRyx \to Px)$ 是否成立，我们要对每一个 $d \in D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$ 检验是否都有 $\mathcal{M} \vDash_{s:=d} \exists yRyx \to Px$
- 当 D 是有穷集合时，这是能行的。当 D 无穷时则未必

谓词逻辑的语义

继续观察: $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是否成立是如何递归地依赖于其子公式 $\exists y Ryx \to Px$ 是否成立的?

- 为了检验 $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是否成立，我们要对每一个 $d \in D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$ 检验是否都有 $\mathcal{M} \vDash_{s:=d} \exists y Ryx \to Px$
- 当 D 是有穷集合时，这是能行的。当 D 无穷时则未必

谓词逻辑的语义

定义 (有效性)

给定谓词逻辑语言 $\mathcal{L}$

- 我们称一个 $\mathcal{L}$ 公式 φ 是 逻辑有效的 或 有效的 （valid，记作 $\models \varphi$)，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M}$，任意 $\mathcal{M}$ 上的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \models_s \varphi$。

谓词逻辑的语义

定义 (有效性)

给定谓词逻辑语言 $\mathcal{L}$

- 假设 Σ 是一个 $\mathcal{L}$ 公式的集合，φ 是一个 $\mathcal{L}$ 公式，我们称 Σ 逻辑蕴含 （logcially implies） φ （记作 $\Sigma \vDash \varphi$），当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M}$，任意 $\mathcal{M}$ 上的变元赋值 s，如果对每个 Σ 中的公式 ψ 都有 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$，那么 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$。

谓词逻辑的语义

- $\Sigma \vDash \varphi$ 即从 Σ 到 φ 的推理是有效的。反过来，如果 $\Sigma \nvDash \varphi$，则存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 s，满足 Σ 中的每个公式却不满足 φ
- 注意：我们在 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 和 $\Sigma \vDash \varphi$ 中都使用了符号 $\vDash$。这是个不幸的选择，请注意区分。
- $\vDash \varphi$ 即 $\emptyset \vDash \varphi$

谓词逻辑的语义

- $\Sigma \vDash \varphi$ 即从 Σ 到 φ 的推理是有效的。反过来，如果 $\Sigma \nvDash \varphi$，则存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 s，满足 Σ 中的每个公式却不满足 φ
- 注意：我们在 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 和 $\Sigma \vDash \varphi$ 中都使用了符号 $\vDash$。这是个不幸的选择，请注意区分。
- $\vDash \varphi$ 即 $\emptyset \vDash \varphi$

谓词逻辑的语义

- $\Sigma \vDash \varphi$ 即从 Σ 到 φ 的推理是有效的。反过来，如果 $\Sigma \nvDash \varphi$，则存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 s，满足 Σ 中的每个公式却不满足 φ
- 注意：我们在 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 和 $\Sigma \vDash \varphi$ 中都使用了符号 $\vDash$。这是个不幸的选择，请注意区分。
- $\vDash \varphi$ 即 $\emptyset \vDash \varphi$

谓词逻辑的语义

如何判断 $\Sigma \models \varphi$ 是否成立？遗憾的是，在谓词逻辑中，不像命题逻辑和一元谓词逻辑，并没有一个机械的一般的方法。这并不是因为逻辑学家不够努力。相反，逻辑学家证明了不存在这样的方法。

但在很多具体情况下，我们还是可以判断的。

谓词逻辑的语义

例

- $\forall x P x \vDash \exists x P x$
- $\exists x P x \vDash \forall x P x$
- 我们可以给出一个具体的模型作为反例来证明 $\Sigma \nvDash \varphi$
- 要论证 $\Sigma \vDash \varphi$ 往往需要给出从 Σ 到 φ 的 证明

谓词逻辑的语义

例

- $\forall x P x \vDash \exists x P x$
- $\exists x P x \vDash \forall x P x$
- 我们可以给出一个具体的模型作为反例来证明 $\Sigma \nvDash \varphi$
- 要论证 $\Sigma \vDash \varphi$ 往往需要给出从 Σ 到 φ 的 证明

谓词逻辑的语义

例

- $\forall x P x \vDash \exists x P x$
- $\exists x P x \vDash \forall x P x$
- 我们可以给出一个具体的模型作为反例来证明 $\Sigma \nvDash \varphi$
- 要论证 $\Sigma \vDash \varphi$ 往往需要给出从 Σ 到 φ 的 证明

形式证明

请回忆：在讲命题逻辑的时候，我们定义过一个 命题逻辑的公理系统 。

- 公理：

  (P1) $\varphi \to \psi \to \varphi$

  (P2) $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$

  (P3) $(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$

- 演绎规则：如果 φ 和 $(\varphi \to \psi)$ 是定理，那么 ψ 也是定理 （ 分离规则 ， modus ponens）

形式证明

- 要给出谓词逻辑的一个 公理系统 ，我们需要给出它的 公理集 和 演绎规则
- 由此，我们可以定义 $\Sigma \vdash \varphi$，即存在一个有穷的、以 φ 结尾的公式序列，其中的公式或是公理，或是 Σ 中公式，或是根据演绎规则由它之前的公式得到的。我们称这样的公式序列为一个 从 Σ 到 φ 的证明序列 。

形式证明

公理集:

1. 所有命题逻辑重言式都是公理
2. $\forall x\varphi \to \varphi_t^x$ 条件: t 若是变元 y, y 替换 x 在 φ_y^x 中的出现不能被 φ 中已有的 $\forall y$、$\exists y$ 约束
3. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
4. $\varphi \to \forall x\varphi$ 条件: x 不在 φ 中自由出现

形式证明

演绎规则:

1. 分离规则：如果一个证明序列中已经有公式 φ 和 $\varphi \to \psi$，那么在后面加上 ψ 还是证明序列
2. 全称概括规则 (Universal Generalization)：如果存在从 Σ 到 φ 的证明序列，并且 x 不在 Σ 的任何公式中自由出现，那么在后面加上 $\forall x\varphi$ 还是证明序列

形式证明

如果语言中有 等词，我们还可以补充两条 等词公理：

- $x = x$
- $x = y \to \varphi \to \varphi'$ 条件: φ 是不含量词的公式，φ' 是把 φ 中任意个 x 的出现替换为 y 得到的公式

形式证明

- 类似命题逻辑，我们给出的是每一条都是“公理模式”，说的是“形如……的是公理”
- 谓词逻辑的公理集是 能行可判定的 ，即存在一个计算机程序可以判断任意字符串是否是公理。
- 特别地，存在一个程序可以能行地把一个谓词逻辑公式还原为我们熟悉的命题逻辑公式并判断它是否为重言式

形式证明

- 所有的公理都是有效的
- 第 2 组公理 $\forall x\varphi \to \varphi^x_t$ 的条件是必要的
- 第 4 组公理 $\varphi \to \forall x\varphi$ 的条件也是必要的

例

- 考虑：$\forall x\exists yRxy \to \exists yRyy$
- 考虑：$Px \to \forall xPx$

形式证明

- 公理系统中没有出现符号 $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ 和 $\exists$，它们可以被视为被定义的
- 根据全称概括规则，如果 φ 是公理，那么

  $\vdash \forall x\varphi$，$\vdash \forall y\forall x\varphi$，$\vdash \forall z\forall y\forall x\varphi\ldots\ldots$
- 公理系统的 可靠性 ：$\Sigma \vdash \varphi$ 蕴涵 $\Sigma \vDash \varphi$。特别地，演绎规则保持逻辑蕴涵

形式证明

例

我们证明：$\vdash \varphi^x_t \rightarrow \exists x\varphi$

- $\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_t$ (公理 2)
- $(\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_t) \rightarrow (\varphi^x_t \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi)$ (公理 1)
- $\varphi^x_t \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi$ (分离规则)

例

我们证明：$\vdash \varphi^x_t \to \exists x \varphi$

- $\forall x \neg\varphi \to \neg\varphi^x_t$ (公理 2)
- $(\forall x \neg\varphi \to \neg\varphi^x_t) \to (\varphi^x_t \to \neg\forall x \neg\varphi)$ (公理 1)
- $\varphi^x_t \to \neg\forall x \neg\varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明：$\vdash \varphi_t^x \to \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi_t^x) \to (\varphi_t^x \to \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \to \neg \forall x \neg \varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明：$\vdash \varphi_t^x \to \exists x\varphi$

- $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi_t^x) \to (\varphi_t^x \to \neg\forall x\neg\varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \to \exists x\varphi$ (定义)

形式证明

例

假设 x 不再 φ 中出现，那么 $\varphi \to \forall x\psi \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$

- $\varphi \to \forall x\psi$ (前提)
- $\forall x\psi \to \psi$ (公理 2)
- $(\varphi \to \forall x\psi) \to (\forall x\psi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ (公理 1)
- $\varphi \to \psi$ (2 次分离规则)
- $\forall x(\varphi \to \psi)$ (全称概况规则)

练习与讨论 10.1

下列是否成立?

1. $\vDash \exists xPx \vee \neg\exists xPx$
2. $\vDash \exists xPx \vee \forall x\neg Px$
3. $\vDash \exists x\exists yRxy \to \exists xRxx$
4. $\vDash \forall x\forall yRxy \to \forall xRxx$

练习与讨论 10.1

下列是否成立?

5. $\vDash \exists x \exists y Rxy \to \exists x \exists y Ryx$
6. $\vDash \forall x Rxx \to \forall x \exists y Rxy$
7. $\vDash \forall x Rxy \to \forall x \exists y Rxy$
8. $\vDash \forall x \exists y Rxy \to \forall x Rxy$

练习与讨论 10.2

证明，对任意公式 φ, ψ 有

$$\varphi \vDash \psi \text{，当且仅当} \vDash \varphi \to \psi$$

只涉及有穷条公式时，我们常用 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ 作为 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$ 的简写

练习与讨论 10.3

下列是否成立?

1. $\forall x Px \vDash \exists x Px$
2. $\forall x \forall y (Rxy \to Ryx), Rab \vDash Rba$
3. $\forall x \forall y (Rxy \to Ryx), Rab \vDash Raa$
4. $\forall x \forall y \forall z (Rxy \to Ryz \to Rxz), Rab, \neg Rac \vDash \neg Rbc$

练习与讨论 11.1

- 如果 $\forall y \varphi^x_y$ 是 $\forall x \varphi$ 的变元易字，证明：
  - $\forall z \varphi^x_z \vdash \forall x \varphi$
  - $\vdash \forall z \varphi^x_z \to \forall x \varphi$
- 证明：$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$