模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 单一主体的认知逻辑：不可分辨性解释、知识与信念
- 多主体认知逻辑
  - 群体认知
  - 多主体的高阶认知

动态认知逻辑

动态认知逻辑 （dynamic epistemic logic）引入了行动算子，对应于模型转变，可以用于刻画一些多主体的认知博弈。

例 (公开宣告逻辑（Public Announcement Logic）)

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid K_a\varphi \mid [\psi!]\varphi \mid C_G\varphi$$

其中，$a \in A$，$G \subset A$

公开宣告逻辑

例 (丙的生日)

甲和乙问丙的生日是几号。丙公开列出了下列候选

- 5.15、5.16、5.19、6.17、6.18、7.14、7.16、8.14、8.15、8.17

接着丙告诉了甲生日是几月，告诉了乙几号。然后丙问二位，我的生日是几号。甲先说：我不知道你的生日是几号，但我知道乙也不知道；接着乙说：我之前是不知道，但我现在知道了；然后甲说：好吧，我现在知道了。请问丙的生日是?

公开宣告逻辑

定义

给定 agent 集 A、命题变元集 P（由此确定了语言）和相应的认知模型 $\mathfrak{M} = (W, R_a, V)_{a \in A}$。给定该语言的公式 ψ，定义

- $W[\psi!] = \{w \in W \mid \mathfrak{M}, w \vDash \psi\}$
- $R_a[\psi!]$（$a \in A$）和 $V[\psi!]$ 分别是 R_a、V 在 $W[\psi!]$ 上的限制。令

$$\mathfrak{M}[\psi!] = (W[\psi!], R_a[\psi!], V[\psi!])_{a \in A}$$

公开宣告逻辑

定义

- $\mathfrak{M}, w \Vdash C_G\varphi$，当且仅当对任意 v，若 $wR_G^C v$，则 $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

  回忆：$R_G^C = (\bigcup_{a\in G} R_a)^*$

- $\mathfrak{M}, w \Vdash [\psi!]\varphi$，当且仅当若 $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$，则 $\mathfrak{M}[\psi!], w \Vdash \varphi$

- $[\psi!]$ 可以看作是一个类 $\Box$ 模态词，把它的 $\Diamond$ 对偶写作 $\langle\psi!\rangle$。那么 $\mathfrak{M}, w \Vdash \langle\psi!\rangle\varphi$ 何以为真?

公开宣告逻辑

注意:

- 如果 R_a 是自反 / 传递 / 欧性的，那么 $R_a[\psi!]$ 也是
- 这意味着，如果 $\mathfrak{F} = (W, R_a)_{a\in A}$ 是一个 $\boldsymbol{S4}$ / $\boldsymbol{S5}$ 框架，那么 $\mathfrak{F}[\psi!]$
- 如果 $\mathfrak{F}$ 只是一个“右无界”（或 $\boldsymbol{D}$）框架（如信念框架），那么 $\mathfrak{F}[\psi!]$ 未必
- 如果 $\mathfrak{F}$ 是右无界且欧性的，那么 $\mathfrak{F}[(\psi \wedge \bigwedge_{a\in A}\langle K_a\rangle\psi)!]$ 也是

公开宣告逻辑

公开宣告逻辑的归约公理

- $[\psi!]p \leftrightarrow (\psi \to p)$，其中 p 是命题变元
- $[\psi!](\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow ([\psi!]\varphi_1 \wedge [\psi!]\varphi_2)$
- $[\psi!]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \to \neg[\psi!]\varphi)$
- $[\psi!]K_a\varphi \leftrightarrow (\psi \to K_a[\psi!]\varphi)$

例

$$[K_b p!](p \wedge K_a p)$$

定理

考虑基于 $\mathbf{S4}$ 或 $\mathbf{S5}$ 的公开宣告逻辑 Λ，那么对该语言中任何一个不带公共知识算子的公式 φ，都存在一个不带公开宣告算子的公式 φ' 有

$$\vdash_\Lambda \varphi \leftrightarrow \varphi'$$

公开宣告逻辑

事实

在上面定理的假设下

$$\vdash_\Lambda [\psi_1!][\psi_2!]\varphi \leftrightarrow [(\psi_1 \wedge [\psi_1!]\psi_2)!]\varphi$$

公开宣告逻辑

带公共知识的公开宣告逻辑

- $C_G(\varphi \to \psi) \to (C_G\varphi \to C_G\psi)$
- $C_G\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge E_G C_G\varphi)$
- $C_G(\varphi \to E_G\varphi) \to (\varphi \to C_G\varphi)$
- 一条新的推理规则：从 $\theta \to [\psi!]\varphi$ 和 $(\theta \wedge \psi) \to E_A\theta$ 可以推出 $\theta \to [\psi!]C_A\varphi$

对“丙的生日”的形式化

回忆：甲和乙问丙的生日是几号。丙公开列出了下列候选

- 5.15、5.16、5.19、6.17、6.18、7.14、7.16、8.14、8.15、8.17

接着丙告诉了甲生日是几月，告诉了乙几号。然后丙问二位，我的生日是几号。甲先说：我不知道你的生日是几号，但我知道乙也不知道；接着乙说：我之前是不知道，但我现在知道了；然后甲说：好吧，我现在知道了。请问丙的生日是?

对“丙的生日”的形式化

语言

- 命题符号集：$\{m_5, m_6, m_7, m_8, d_{14}, d_{15}, d_{16}, d_{17}, d_{18}, d_{19}\}$、agent 集 $A = \{甲, 乙\}$
- 定义 $\mathcal{M}$ 为公式集 $\{m_5, m_6, m_7, m_8\}$，$\mathcal{D}$ 为 $\{d_{14}, \ldots, d_{19}\}$
- 定义 $\mathcal{P}$ 为公式集 $\{m_5 \wedge d_{15}, \ldots, m_8 \wedge d_{17}\}$。我们还可定义，例如 $\mathcal{D}_{m_5} = \{d_{15}, d_{16}, d_{19}\}$……，$\mathcal{M}_{d_{15}} = \{m_5, m_8\}$……

对“丙的生日”的形式化

初始设置

(I1) $C_A \bigwedge_{m\in\mathcal{M}} (m \to \bigwedge_{m'\in\mathcal{M}\setminus\{m\}} \neg m') \wedge C_A \bigwedge_{d\in\mathcal{D}} (d \to \bigwedge_{d'\in\mathcal{D}\setminus\{d\}} \neg d')$

(I2) $C_A(\bigvee \mathcal{P}) \wedge C_A(\bigwedge_{\varphi\in\mathcal{P}} \langle C_A\rangle\varphi)$

(I3) $\bigwedge_{m\in\mathcal{M}} C_A\Big(\bigvee \mathcal{D}_m \to (K_{甲} \bigvee \mathcal{D}_m \wedge \bigwedge_{d\in\mathcal{D}_m} \langle K_{甲}\rangle d)\Big)$

(I4) $\bigwedge_{d\in\mathcal{D}} C_A\Big(\bigvee \mathcal{M}_d \to (K_{乙} \bigvee \mathcal{M}_d \wedge \bigwedge_{m\in\mathcal{M}_d} \langle K_{乙}\rangle m)\Big)$

对“丙的生日”的形式化

- 对 $x \in A$，定义公式 (KB_x) 为 $\bigwedge_{\varphi \in \mathcal{P}} (\varphi \to K_x \varphi)$
- 甲在第一轮公开宣告了：$\neg\mathsf{KB}_{甲} \wedge K_{甲}\neg\mathsf{KB}_{乙}$
- 之后乙宣告了：$\mathsf{KB}_{乙}$，最后甲宣告了：$\mathsf{KB}_{甲}$
- 以下是带公共知识的公开宣告逻辑的定理

$$\mathsf{I1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{I4}$$

$$\to [\neg\mathsf{KB}_{甲} \wedge K_{甲}\neg\mathsf{KB}_{乙}!][\mathsf{KB}_{乙}!][\mathsf{KB}_{甲}!]C_A(m_7 \wedge d_{16})$$

时空逻辑

从认识论回归形而上学：相对论时空观下的时间锥

- 按四维空间可将时空点表示为四元组 (x, y, z, t)，亦可简化为二元组 (s, t)
- 定义时空点 $(s, t) \leq (s', t')$，当且仅当即 (s', t') 在 (s, t) 因果未来 中，即等于或小于光速运动的信号可从 (s, t) 抵达 (s', t')，也即 $t \leq t'$ 且 $(s - s')^2 \leq (t - t')^2$（用“光秒”作为空间距离单位，用“秒”作为时间距离单位）

时空逻辑

- $\leq$ 是自反的、传递的、直的 (directed)，即对任意 (s_0, t_0) 和 (s_1, t_1) 存在 (s, t) 有 $(s_0, t_0) \leq (s, t)$ 且 $(s_1, t_1) \leq (s, t)$
- 公式 $.2$： $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$
- 公理系统 $\boldsymbol{S4.2}$： $\boldsymbol{S4} + .2$
- $\boldsymbol{S4.2}$ 对自反、传递、直的框架是可靠且完全的
- 因此，一般认为相对论下的时空逻辑是 $\boldsymbol{S4.2}$

假设时间有终点

- 如果一个自反、传递、直的框架有极大元，那么它有唯一的最大元——终点
- $K2$ 逻辑被定义为 $S4.2 + \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$
- $K2$ 对带最大元的自反、传递、直的框架是可靠且完全的

时空逻辑

低于光速的旅行

- 定义 $(s,t) \preceq (s',t')$，当且仅当 $(s,t)=(s',t')$，或 $t<t$ 且 $(s-s')^2<(t-t')^2$。
- 可以证明，其对应的逻辑仍然是 **$S4.2$**

时空逻辑

两种不同的非自反未来

- $(s,t) < (s',t')$，当且仅当 $(s,t) \leq (s',t')$ 且 $(s,t) \neq (s',t')$ (光速版)
- 定义 $(s,t) < (s',t')$，当且仅当 $t < t$ 且 $(s-s')^2 < (t-t')^2$ (低于光速版)
- 考虑公式 $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(\Diamond p \wedge \Diamond q)$。它在光速版中不是有效的，而在低于光速版的框架中是有效的

习题

- 形式化 Muddy Children