模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 模态饱和与超滤扩张

前情提要

定义

对基本模态逻辑语言框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$，定义函数

$m_\Diamond, m_\Box : P(W) \to P(W)$：

- $m_\Diamond(X) = \{w \in W \mid \exists v \in X\ Rwv\}$
- $m_\Box(X) = \{w \in W \mid \forall v \in W\ (Rwv \to v \in X)\}$

直观：如果我们把 X 看作公式 φ_X，那么 $m_\Diamond(X)$ 可以看作 $\Diamond\varphi_X$，而 $m_\Box(X)$ 可以看作 $\Box\varphi_X$

注意：$m_\Box(X) = W \setminus m_\Diamond(W \setminus X)$，$m_\Diamond(X) = W \setminus m_\Box(W \setminus X)$

前情提要

定义 (超滤扩张)

给定 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是基本模态逻辑语言框架。定义 $\mathfrak{F}$ 的超滤扩张 $\mathrm{ue}\mathfrak{F} = (Uf(W), R^{\mathrm{ue}})$。其中 $Uf(W) = \{u \subset P(W) | u$ 是 W 上超滤 $\}$，R^{ue} 定义如下：对 $u, v \in Uf(W)$，

$$R^{\mathrm{ue}}uv \iff \forall X \subset W \ (X \in v \to m_{\Diamond}(X) \in u)$$

注意：$R^{\mathrm{ue}}uv \iff \forall X \subset W \ (m_{\Box}(X) \in u \to X \in v)$

前情提要

定义 (超滤扩张)

给定模态逻辑语言 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，定义模型 $\mathfrak{M}$ 的超滤扩张 $\mathrm{ue}M = (\mathrm{ue}\mathfrak{F}, V^{\mathrm{ue}})$。其中

$$V^{\mathrm{ue}}(p_i) = \{u \in Uf(W) \mid V(p_i) \in u\}$$

事实

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意个 $w \in W$，令 $u_w = \{X \subset W \mid w \in X\}$ 是 w 生成的主超滤。则 $w \mapsto u_w$ 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 的 **嵌入** 。即，它是一一的，并且对任意 $w, v \in W$，Rwv 当且仅当 $R^{\mathrm{ue}}u_wu_v$， $w \in V(p)$ 当且仅当 $u_w \in V^{\mathrm{ue}}(p)$

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ 和任意 $u \in Uf(W)$ 有:

$$V(\phi) \in u \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ueM}, u \Vdash \phi$$

因而，对任意 $w \in W$ 有 $w \leftrightsquigarrow u_w$

注意: $m_{\Diamond}(V(\psi)) = V(\Diamond\psi)$

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 是模态饱和的

超滤扩张

推论

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及 w, w' 分别是其中的状态，则

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightharpoons \mathrm{ue}\mathfrak{M}, u_{w'}$$

饱和模型

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{M}$。假设 A 是 $\mathfrak{M}$ 论域的一个子集

- 定义语言 $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a\}_{a \in A}$，即添加了 $|A|$ 那么多个新的常数符号。$\mathfrak{M}$ 到 $\mathcal{L}_A$ 的膨胀 $\mathfrak{M}_A$ 把每个 c_a 解释为 a
- 定义 $\mathcal{L}_A$ 公式集 $p(x)$（其中公式至多含有自由变元 x）是 $\mathfrak{M}$ 的一个 A 上的 1-型（1-type），当且仅当 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中有穷可实现。即，对 $p(x)$ 每个有穷子集 $p_0(x)$ 存在 $\mathfrak{M}$ 论域中元素 b 有 $\mathfrak{M}_A \models p_0(b)$

事实

在前一页定义的假设下。一个至多含有 x 为自由变元的 $\mathcal{L}_A$ 公式集 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中 有穷可实现，当且仅当 $p(x) \cup \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}_A$ 是一致的

饱和模型

例

- 对每个模态逻辑公式 ϕ，$ST_x(\phi)$ 是一个只含有 x 为自由变元的一阶逻辑公式
- 考虑 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$，$w \in W$。假设模态逻辑公式集 Σ 在 $R[w]$ 上有穷可满足。则

$$\{Rwx\} \cup \{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Sigma\}$$

是一个 $\mathfrak{M}$ 的 $\{w\}$ 上的 1-型

饱和模型

定义

- 令 κ 是一个（有穷或无穷的）基数。$\mathfrak{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。我们称 $\mathfrak{M}$ 是 κ-饱和的 （κ-saturated），当且仅当对任意 $\mathfrak{M}$ 论域的子集 A 有 $|A| < \kappa$，任意 $\mathfrak{M}$ 的 A 上的 1-型 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中可实现，即存在 $\mathfrak{M}$ 中 b 有 $\mathfrak{M}_A \models p(b)$

显然，若 $\kappa < \lambda$，λ-饱和蕴含 κ-饱和。模态逻辑中主要关注 ω-饱和性 ，即所有只含有有穷参数的 1-型都可实现

饱和模型

例

- 有穷结构都是 ω-饱和的
- $(\mathbb{Q}, <)$ 是 ω-饱和的
- $(\mathbb{N}, <)$ 不是 ω-饱和的

定理

给定模态逻辑语言类型 τ。任何 ω-饱和的 τ-模型都是模态饱和的。因此，ω-饱和的 τ-模型类具有 Hennessy-Milner 性质

饱和模型

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中 n 元谓词符号 R，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 R 的解释是 $\prod_U A_i$ 上 n 元关系 R_U，满足（其中，R_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 R 的解释）：

$$R_U[f_1]_U \ldots [f_n]_U \;\Leftrightarrow\; \{i \in I \mid R_i f_1(i) \ldots f_n(i)\} \in U$$

定理 (超积基本定理（Łoś）)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 U 是 I 上的超滤，对每个 $i \in I$ 有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}_i$

- 对任意 $\mathcal{L}$ 公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathfrak{A}$ 中元素 $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) \;\Leftrightarrow\; \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \alpha(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$

饱和模型

定义

我们称 I 上的超滤 U 是 可数不完全的 （countably incomplete），当且仅当存在 $\langle X_n \rangle_{n<\omega}$ 使得，每个 $X_n \in U$ 但 $\bigcap_n X_n \notin U$

例

- 任何 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤都是可数不完全的：$\bigcap_n (\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \emptyset$

饱和模型

定理

令 $\mathcal{L}$ 是一个可数语言。I 是非空集合。对每个 $i \in I$，$\mathfrak{M}_i$ 是 $\mathcal{L}$-结构。U 是 I 上的一个可数不完全的超滤。那么超积 $\prod_U \mathfrak{M}_i$ 是 $\aleph_1$-饱和的

引理 (迂回引理)

给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 以及分别在其中的状态 w, v。下列命题等价

- $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{N}, v$
- $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightharpoons \mathfrak{ue}\mathfrak{N}, u_v$
- 存在超幂 $\prod_U \mathfrak{M}$ 和 $\prod_U \mathfrak{N}$，使得
  $\prod_U \mathfrak{M}, [c_w]_U \leftrightharpoons \prod_U \mathfrak{N}, [c_v]_U$

引理 (迂回引理)

给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 以及分别在其中的状态 w, v。下列命题等价

- $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{N}, v$
- $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightharpoons \mathfrak{ue}\mathfrak{N}, u_v$
- 存在 ω-饱和模型 $\mathfrak{M}^*, w^*$ 和 $\mathfrak{N}^*, v^*$ 以及初等嵌入 $f : \mathfrak{M}, w \preccurlyeq \mathfrak{M}^*, w^*$ 和 $g : \mathfrak{N}, v \preccurlyeq \mathfrak{N}^*, v^*$ 有，$\mathfrak{M}^*, w^* \leftrightharpoons \mathfrak{N}^*, v^*$

下期预告

- Van Benthem 刻画定理