模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- Hennessy-Milner 性质、模态饱和模型
- 滤和超滤
- 超积与超幂

定理 (超积基本定理（Łoś）)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 U 是 I 上的超滤，对每个 $i \in I$ 有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}_i$。令 $\mathfrak{A} = \prod_U \mathfrak{A}_i$ 是它们的超积。则

- 对任意 $\mathcal{L}$ 公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathfrak{A}$ 中元素 $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \alpha(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$

推论

给定 I 上超滤 U 和结构 $\mathfrak{A}$。令 $\prod_U \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 模 U 的超幂。那么对每个一阶语句 σ 有

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \prod_U \mathfrak{A} \models \sigma$$

超积与超幂

存在 $\mathfrak{A}$ 到它的超幂 $\prod_U \mathfrak{A}$ 中的典范初等嵌入（elementary embedding）：

- 对任意 $a \in A$（A 是 $\mathfrak{A}$ 的论域），定义常函数 $c_a : I \to A$，使得对任意 $i \in I$ 有 $c_a(i) = a$
- 定义 $d : A \to \prod_U A$，使得对任意 $a \in A$，$d(a) = [c_a]_U$

推论

令 $\prod_U \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的超幂。定义 d 如前，则 d 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\prod_U \mathfrak{A}$ 的初等嵌入，即 d 是单射且对任意公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n) \iff \prod_U \mathfrak{A} \vDash \alpha(d(a_1), \ldots, d(a_n))$$

超积与超幂

超积常被用来构造足够饱和的模型

推论 (紧致性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的对任意语句集 Σ，如果 Σ 的每个有穷子集有一个模型，那么 Σ 有一个模型。

Hennessy-Milner 类

定义

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-模型类 K。我们称 K 是一个 Hennessy-Milner 类，或称 K 有 Hennessy-Milner 性质，当且仅当对任意 K 中模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$，以及分别在它们中的状态 w, w' 有，$w \leftrightsquigarrow w'$ 蕴含 $w \leftrightharpoons w'$

模态饱和

定义

考虑基本模态逻辑语言 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和公式集 Σ。称模型 $\mathfrak{M}$ 是 模态饱和的 （modally saturated, m-saturated），当且仅当对任意 $w \in W$ 任意公式集 Σ，如果 Σ 在 $R[w] = \{v \in W \mid Rwv\}$ 中有穷可满足，那么 Σ 在 $R[w]$ 可满足

事实

给定模态逻辑语言类型 τ。所有模态饱和的 τ-模型组成的类具有 Hennessy-Milner 性质

超滤扩张

有一种特殊的简单的超滤

定义

对任意非空集合 W，任意 $w \in W$

$$U_w = \{X \subset W \mid w \in X\}$$

是一个超滤，我们称形如 U_w 的超滤为 主超滤 （principal ultrafilter）

超滤扩张

给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R_\Delta, V)_{\Delta\in\tau}$。我们可以将集合 $X \subset W$ 看作是“一个”公式 $\phi_X = \bigwedge \{\phi \mid \forall v \in X\ v \Vdash \phi\}$，一个滤 $F \subset P(W)$ 就可以看作是一个一致的公式集 $\{\phi_X\}_{X\in F}$（为什么?），一个超滤 $U \subset P(W)$ 可以看作是一个一致且完全的公式集

每个主滤 U_w 对应的正好是 w 上满足的公式集，我们称 w 实现 U_w 而未必所有的超滤都被某个 $w \in W$ 实现

超滤扩张

定义

对基本模态逻辑语言框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$，定义函数

$m_\Diamond, m_\Box : P(W) \to P(W)$：

- $m_\Diamond(X) = \{w \in W \mid \exists v \in X\ Rwv\}$
- $m_\Box(X) = \{w \in W \mid \forall v \in W\ (Rwv \to v \in X)\}$

直观: 如果我们把 X 看作公式 φ_X，那么 $m_\Diamond(X)$ 可以看作 $\Diamond\varphi_X$，而 $m_\Box(X)$ 可以看作 $\Box\varphi_X$

注意: $m_\Box(X) = W \setminus m_\Diamond(W \setminus X)$，$m_\Diamond(X) = W \setminus m_\Box(W \setminus X)$

超滤扩张

定义

给定模态语言类型 τ，和 τ-框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\tau\in\triangle}$。对每个 $n+1$ 元关系 $R_\triangle$，定义 $m_\triangle, m_\triangle^\delta : (P(W))^n \to P(W)$：

- $m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W \mid \exists v_1 \ldots v_n \in W\ (\bigwedge_{1\leq i\leq n} v_i \in X_i \wedge R_\triangle w v_1 \ldots v_n)\}$
- $m_\triangle^\delta(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W \mid \forall v_1 \ldots v_n \in W\ (R_\triangle w v_1 \ldots v_n \to \bigvee_{1\leq i\leq n} v_i \in X_i)\}$

定义 (超滤扩张)

给定 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是基本模态逻辑语言框架。定义 $\mathfrak{F}$ 的超滤扩张 $\mathrm{ue}\mathfrak{F} = (Uf(W), R^{\mathrm{ue}})$。其中 $Uf(W) = \{u \subset P(W) | u$ 是 W 上超滤 $\}$，R^{ue} 定义如下：对 $u, v \in Uf(W)$，

$$R^{\mathrm{ue}}uv \iff \forall X \subset W \ (X \in v \to m_{\Diamond}(X) \in u)$$

注意: $R^{\mathrm{ue}}uv \iff \forall X \subset W \ (m_{\Box}(X) \in u \to X \in v)$

超滤扩张

定义 (超滤扩张)

给定模态逻辑语言 τ 和 τ-框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$。定义 $\mathfrak{F}$ 的超滤扩张 $\mathrm{ue}\mathfrak{F} = (Uf(W), R^{\mathrm{ue}}_\triangle)_{\triangle\in\tau}$。其中，$n+1$ 元的 $R^{\mathrm{ue}}_\triangle$ 定义如下：对 $u_0, u_1, \dots u_n \in Uf(W)$，

$$R^{\mathrm{ue}}_\triangle u_0 u_1 \dots u_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall X_1, \dots, X_n \subset W \ \Big(\bigwedge_{1\le i\le n} X_i \in u_i \rightarrow m_\triangle(X_1, \dots, X_n) \in u_0 \Big)$$

超滤扩张

定义 (超滤扩张)

给定模态逻辑语言 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，定义模型 $\mathfrak{M}$ 的超滤扩张 $\mathfrak{ue}M = (\mathfrak{ue}\mathfrak{F}, V^{\mathfrak{ue}})$。其中

$$V^{\mathfrak{ue}}(p_i) = \{u \in Uf(W) \mid V(p_i) \in u\}$$

超滤扩张

事实

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意个 $w \in W$，令 $u_w = \{X \subset W \mid w \in X\}$ 是 w 生成的主超滤。则 $w \mapsto u_w$ 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 的 嵌入 。即，它是一一的，并且对任意 $w, v \in W$，Rwv 当且仅当 $R^{ue}u_w u_v$，$w \in V(p)$ 当且仅当 $u_w \in V^{ue}(p)$

超滤扩张

例

考虑 $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$，$\mathrm{ue}\mathfrak{F}$ 长什么样?

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ 和任意 $u \in Uf(W)$ 有：

$$V(\phi) \in u \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \phi$$

因而，对任意 $w \in W$ 有 $w \leftrightsquigarrow u_w$

注意：$m_{\Diamond}(V(\psi)) = V(\Diamond\psi)$

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 是模态饱和的

超滤扩张

推论

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及 w, w' 分别是其中的状态，则

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \iff \mathrm{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightharpoons \mathrm{ue}\mathfrak{M}, u_{w'}$$

饱和模型

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{M}$。假设 A 是 $\mathfrak{M}$ 论域的一个子集

- 定义语言 $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a\}_{a \in A}$，即添加了 $|A|$ 那么多个新的常数符号。$\mathfrak{M}$ 到 $\mathcal{L}_A$ 的膨胀 $\mathfrak{M}_A$ 把每个 c_a 解释为 a
- 定义 $\mathcal{L}_A$ 公式集 $p(x)$（其中公式至多含有自由变元 x）是 $\mathfrak{M}$ 的一个 A 上的 1-型 （1-type），当且仅当 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中 有穷可实现 。即，对 $p(x)$ 每个有穷子集 $p_0(x)$ 存在 $\mathfrak{M}$ 论域中元素 b 有 $\mathfrak{M}_A \models p_0(b)$

饱和模型

事实

在前一页定义的假设下。一个至多含有 x 为自由变元的 $\mathcal{L}_A$ 公式集 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中 有穷可实现，当且仅当 $p(x) \cup \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}_A$ 是一致的

例

- 对每个模态逻辑公式 ϕ，$ST_x(\phi)$ 是一个只含有 x 为自由变元的一阶逻辑公式
- 考虑 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$，$w \in W$。假设模态逻辑公式集 Σ 在 $R[w]$ 上有穷可满足。则

$$\{Rwx\} \cup \{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Sigma\}$$

是一个 $\mathfrak{M}$ 的 $\{w\}$ 上的 1-型

饱和模型

定义

- 令 κ 是一个（有穷或无穷的）基数。$\mathfrak{M}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构。我们称 $\mathfrak{M}$ 是 κ-饱和的 （κ-saturated），当且仅当对任意 $\mathfrak{M}$ 论域的子集 A 有 $|A| < \kappa$，任意 $\mathfrak{M}$ 的 A 上的 1-型 $p(x)$ 在 $\mathfrak{M}_A$ 中可实现，即存在 $\mathfrak{M}$ 中 b 有 $\mathfrak{M}_A \models p(b)$

显然，若 $\kappa < \lambda$，λ-饱和蕴含 κ-饱和。模态逻辑中主要关注 ω-饱和性 ，即所有只含有有穷参数的 1-型都可实现

饱和模型

例

- 有穷结构都是 ω-饱和的
- $(\mathbb{Q}, <)$ 是 ω-饱和的
- $(\mathbb{N}, <)$ 不是 ω-饱和的

习题

- 2.5.4, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.10

下期预告

- Van Benthem 刻画定理