模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 标准翻译 $ST_x(\phi)$

$$ST_x(p) = Px$$

$$ST_x(\bot) = x \neq x$$

$$ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi)$$

$$ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)$$

$$ST_x(\triangle\,(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \exists y_1 \ldots \exists y_n (R_\triangle x y_1 \ldots y_n \wedge$$
$$ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \cdots \wedge ST_{y_n}(\phi_n))$$

标准翻译

问题：模态逻辑对应于一阶逻辑的哪个片段？

显然，模态逻辑的表达能力严格弱于一阶逻辑

例

表达个数

标准翻译

事实

- 假设模态语言类型 τ 只含有一元模态词。对每个 τ-公式 ϕ，$ST_x(\phi)$ 逻辑等价于一个只含有两个变元 x, y 的一阶逻辑公式
- 一般地，如果 τ 所含模态词的最高元数不超过 n，那么每个 τ-公式的标准翻译逻辑等价于一个至多含有 $n+1$ 个变元的一阶逻辑公式

标准翻译

例

$$ST_x(\Diamond(\Box p \to q))$$

但并不是，所有只含有两个变元的一阶公式都等价于一个模态逻辑公式的翻译

例：Rxx

标准翻译

定义

给定模态逻辑语言类型 τ。令 C 是 τ-模型类，K 是 C 的子类，Γ 是 τ-公式集。我们称 Γ 在 C 中定义了 K，当且仅当对任意 $\mathfrak{M} \in C$，$\mathfrak{M} \in K$ 当且仅当 $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$。

如果 C 是所有 τ-模型组成的类，则称 Γ 定义了 K 或 Γ 刻画了 K

标准翻译

显然，如果模型类 K 是模态逻辑公式（集）可定义的，那么它也是一阶逻辑公式（集）可定义的，也即（广义）初等类。我们将在之后的课程中用模型论工具刻画模态逻辑公式集可定义的模型类。

Hennessy-Milner 类

回忆: 如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是相有穷的，那么模态等价关系就是互模拟

定义

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-模型类 K。我们称 K 是一个 Hennessy-Milner 类，或称 K 有 Hennessy-Milner 性质，当且仅当对任意 K 中模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$，以及分别在它们中的状态 w, w' 有，$w \leftrightsquigarrow w'$ 蕴含 $w \leftrightarrows w'$

模态饱和

定义

考虑基本模态逻辑语言 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对 $X \subset W$ 和公式集 Σ。

- 称 Σ 在 X 中可满足，当且仅当存在 $x \in X$ 使得，对所有 $\phi \in \Sigma$ 有 $\mathfrak{M}, x \Vdash \phi$。
- 称 Σ 在 X 中有穷可满足，当且仅当 Σ 的每个有穷子集在 X 中可满足

模态饱和

定义

考虑基本模态逻辑语言 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和公式集 Σ。称模型 $\mathfrak{M}$ 是 模态饱和的 （modally saturated, m-saturated），当且仅当对任意 $w \in W$ 任意公式集 Σ，如果 Σ 在 $R[w] = \{v \in W \mid Rwv\}$ 中有穷可满足，那么 Σ 在 $R[w]$ 可满足

模态饱和

定义

考虑任意模态逻辑语言 τ。我们称一个 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 是 模态饱和的，当且仅当对任意 $\mathfrak{M}$ 中状态 w，任意 n 元模态词 $\triangle \in \tau$，以及任意公式集序列 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$，如果对任意有穷公式集序列 $\Delta_1 \subset \Sigma_1, \ldots, \Delta_n \subset \Sigma_n$ 都有状态 $v_1, \ldots, v_n$ 使得 $R_\triangle wv_1 \ldots v_n$ 且 $v_i \Vdash \Delta_i$ $(1 \leq i \leq n)$，那么存在状态 $v_1, \ldots, v_n$ 使得 $R_\triangle wv_1 \ldots v_n$ 且 $v_i \Vdash \Sigma_i$ $(1 \leq i \leq n)$

事实

给定模态逻辑语言类型 τ。所有模态饱和的 τ-模型组成的类具有 Hennessy-Milner 性质

滤和超滤

定义

任给非空集合 W，定义 F 是 W 上的滤（filter），若 $F \subset P(W)$ 且满足

- $W \in F$，$\emptyset \notin F$
- 对任意 $X, Y \in F$，$X \cap Y \in F$
- 对任意 $X \in F$ 任意 $Z \subset W$ 且 $Z \supset X$，$Z \in F$

我们称 W 上的滤 U 是 超滤（ultrafilter），当且仅当对任意 $X \subset W$，$X \notin U$ 蕴含 $(W \setminus X) \in U$

滤和超滤

定义

- 令 W 是一个非空集合，$E \subset P(W)$。我们称 E 有有穷交性质，当且仅当 E 中任意有穷多个元素的交非空。
- 假设 $E \subset P(W)$ 有有穷交性质，称

$$F = \{Y \subset W \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 和 } X_1, \ldots X_n \in E \text{ 有 } Y \supset \bigcap_{1 \le i \le n} X_i\}$$

$$= \bigcap \{G \mid E \subset G \text{ 且 } G \text{ 是 } W \text{ 上的滤}\}$$

是由 E 生成的 W 上的滤

定理 (超滤存在)

对任意非空集合 W，任意 W 上的滤 F，存在 W 上的超滤 $U \supset F$。因而，任何具有有穷交性质的 $E \subset P(W)$ 都可以扩张为一个超滤。

超积与超幂

定义

假设 U 是非空集合 I 上的超滤，并且对每个 $i \in I$ 又非空集合 A_i

- 定义 $\prod_{i\in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^I \mid \forall i \in I\ f(i) \in A_i\}$
- 称 $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$ 是 U-等价的，记作 $f \sim_U g$，当且仅当

$$\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$$

注意：$\sim_U$ 是 $\prod_{i\in I} A_i$ 上的等价关系

超积与超幂

定义

- 对任意 $f \in \prod_{i\in I} A_i$，定义 $[f]_U = \{g \in \prod_{i\in I} A_i \mid g \sim_U f\}$
- 定义 $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 (ultraproduct)

$$\prod_U A_i = \{[f]_U \mid f \in \prod_{i\in I} A_i\}$$

- 如果每个 $A_i = A$，我们将 $\prod_U A_i$ 记作 $\prod_U A$，称作 A 模 U 的超幂 (ultrapower)

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中 n 元谓词符号 R，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 R 的解释是 $\prod_U A_i$ 上 n 元关系 R_U，满足（其中，R_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 R 的解释）：

$$R_U[f_1]_U \ldots [f_n]_U \;\Leftrightarrow\; \{i \in I \mid R_i f_1(i) \ldots f_n(i)\} \in U$$

超积与超幂

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中 n 元函数符号 F，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 F 的解释是 $\prod_U A_i$ 上 n 元函数 F_U，满足（其中，F_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 F 的解释)：

$$F_U([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) = [\{(i, F_i(f_1(i), \ldots, f_n(i))) \mid i \in I\}]_U$$

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中常数符号 c，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 c 的解释 c_U 是 $\prod_U A_i$ 中元素（其中，$c_i \in A_i$ 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 c 的解释）：

$$c_U = [\{(i, c_i) \mid i \in I\}]_U$$

超积与超幂

注意:

- F_U 是良定义的
- 如果每个 $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$，则称 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为 $\mathfrak{A}$ 模 U 的超幂，记作 $\prod_U \mathfrak{A}$

超积与超幂

定理 (超积基本定理（Łoś）)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 U 是 I 上的超滤，对每个 $i \in I$ 有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}_i$

- 对每个 $\mathcal{L}$ 词项 $t(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathfrak{A} = \prod_U \mathfrak{A}_i$ 中元素 $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U$ 有

$$t^{\mathfrak{A}}([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) = [\{(i, t^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))) \mid i \in I\}]_U$$

定理 (超积基本定理（Łoś）)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 U 是 I 上的超滤，对每个 $i \in I$ 有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}_i$

- 对任意 $\mathcal{L}$ 公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathfrak{A}$ 中元素 $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) \;\Leftrightarrow\; \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \alpha(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$

超积与超幂

推论

给定 I 上超滤 U 和结构 $\mathfrak{A}$。令 $\prod_U \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 模 U 的超幂。那么对每个一阶语句 σ 有

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \prod_U \mathfrak{A} \models \sigma$$

超积与超幂

存在 $\mathfrak{A}$ 到它的超幂 $\prod_U \mathfrak{A}$ 中的典范初等嵌入（elementary embedding）：

- 对任意 $a \in A$，定义常函数 $c_a : I \to A$，使得对任意 $i \in I$ 有 $c_a(i) = a$
- 定义 $d : A \to \prod_U A$，使得对任意 $a \in A$，$d(a) = [c_a]_U$

推论

令 $\prod_U \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的超幂。定义 d 如前，则 d 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\prod_U \mathfrak{A}$ 的初等嵌入，即 d 是单射且对任意公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n) \iff \prod_U \mathfrak{A} \vDash \alpha(d(a_1), \ldots, d(a_n))$$

超积与超幂

超积常被用来构造足够饱和的模型

推论 (紧致性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的对任意语句集 Σ，如果 Σ 的每个有穷子集有一个模型，那么 Σ 有一个模型。

下期预告

- 超滤扩张
- van Benthem 刻画定理