模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 模型 $(\mathfrak{M}, R, V)$ 的一个 Σ 过滤
- 过滤定理

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_{\Sigma} \mathfrak{M}^f, |w|$$

- 最小过滤最大过滤
  - $R^s|w||v|$，当且仅当存在 $w' \in |w|, v' \in |v|$ 有 $Rw'v'$
  - $R^l|w||v|$，当且仅当对任意 $\Diamond\phi \in \Sigma$ 有，$v \Vdash \phi$ 蕴含 $w \Vdash \Diamond\phi$

定理 (有穷模型性——过滤)

- 对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ，如果 ϕ 可满足，那么存在一个至多包含 2^m 个状态的有穷模型满足 ϕ。其中 m 是 ϕ 子公式的个数。
- 进一步如果 ϕ 在一个自反/右无界/对称/传递的模型中可满足，那么 ϕ 也在一个满足相应性质的有穷模型中可满足

过滤

证明.

- 自返、右无界：在任何过滤下保持
- 对称：最小过滤下保持
- 传递性：考虑 W_Σ 上的关系

$R^t|w||v|$，当且仅当对任意 $\Diamond\phi \in \Sigma$，$v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$ 蕴含 $w \Vdash \Diamond\phi$

定义 (簇)

任给基本模态逻辑语言框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$。我们称 $C \subset W$ 是一个 (W, R) 上的 簇 （cluster），当且仅当 R 是 C 上的一个等价关系，且对任意 $D \supsetneq C$，R 不是 D 上的等价关系

例

假设 $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ 是 $(\mathbb{Q}, <, V)$ 的一个有穷传递过滤。定义 $\mathbb{Q}$ 上关系 $R' = \{(x, y) \mid R^f|x||y|\}$。$(\mathbb{Q}, R')$ 上有有穷个簇或单点集。

定义 (过滤——一般模态逻辑语言)

其中“上界”“下界”分别是：对任意 $w, v_1, \ldots, v_n \in W$，

- $R_\triangle w v_1 \ldots v_n$ 蕴含 $R'|w||v_1|\ldots|v_n|$
- 若 $R'|w||v_1|\ldots|v_n|$，则对任意 $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \Sigma$，$v_i \Vdash \phi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ 蕴含 $w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$

标准翻译

定义

给定模态逻辑语言 (τ, Φ)。令 $\mathcal{L}^1_\tau(\Phi)$ 是下述对应的一阶逻辑语言：对每个 $p \in \Phi$ 有对应的一元谓词符号 P，对每个 n 元模态词 $\triangle$ 有对应的 $n+1$ 元谓词符号 $R_\triangle$

标准翻译

给定一个一阶变元 x。递归定义标准翻译 ST_x：

$$ST_x(p) = Px$$

$$ST_x(\bot) = x \neq x$$

$$ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi)$$

$$ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)$$

$$ST_x(\triangle\,(\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \exists y_1 \ldots \exists y_n (R_\triangle x y_1 \ldots y_n \wedge$$

$$ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \cdots \wedge ST_{y_n}(\phi_n))$$

标准翻译

给定一个一阶变元 x。递归定义标准翻译 ST_x：

$$
\begin{aligned}
ST_x(p) &= Px \\
ST_x(\bot) &= x \neq x \\
ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi) \\
ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) \\
ST_x(\triangle\ (\phi_1, \ldots, \phi_n)) &= \exists y_1 \ldots \exists y_n (R_\triangle x y_1 \ldots y_n \wedge \\
&\qquad ST_{y_1}(\phi_1) \wedge \cdots \wedge ST_{y_n}(\phi_n))
\end{aligned}
$$

标准翻译

例

- $ST_x(\Diamond\phi) = \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi))$
- $ST_x(\Box\phi)$
- $ST_x(\Diamond(\Box p \to q))$

标准翻译

注意：

- $ST_x(\phi)$ 是以 x 为唯一自由变元的公式
- 多模态词嵌套的翻译中，那些 y 的选择只要求不冲突
- 标准翻译中出现的量词都是“有界量词”

标准翻译

回忆: 我们可以将一个 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 看作是对应的谓词逻辑模型，其中每个 $R_{\triangle}$ 的解释已有，P 解释为 $V(p)$

定理

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-公式 ϕ。

- 对任意 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 及其状态 w，$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w]$
- 对任意 τ-模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M} \Vdash \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M} \vDash \forall x ST_x(\phi)$

标准翻译的应用

例

事实

模态逻辑满足紧致性。即，若模态逻辑公式集 Σ 是有穷可满足的，那么 Σ 是可满足的

标准翻译的应用

例

定义一阶逻辑语言的 Guarded Fragment 为：

$$P_i\bar{x} \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \exists\bar{y}(G(\bar{x},\bar{y}) \wedge \phi(\bar{x},\bar{y}))$$

其中，$G(\bar{x},\bar{y})$ 是原子公式，且 ϕ 中自由出现的变元必须在 $G(\bar{x},\bar{y})$ 中出现

标准翻译

标准翻译的应用

例

事实

一阶逻辑的 Guarded Fragment 是可判定的

标准翻译

问题：模态逻辑对应于一阶逻辑的哪个片段？

显然，模态逻辑的表达能力严格弱于一阶逻辑

例

表达个数

标准翻译

事实

- 假设模态语言类型 τ 只含有一元模态词。对每个 τ-公式 ϕ，$ST_x(\phi)$ 逻辑等价于一个只含有两个变元 x, y 的一阶逻辑公式
- 一般地，如果 τ 所含模态词的最高元数不超过 n，那么每个 τ-公式的标准翻译逻辑等价于一个至多含有 $n+1$ 个变元的一阶逻辑公式

标准翻译

例

$$ST_x(\Diamond(\Box p \to q))$$

但并不是，所有只含有两个变元的一阶公式都等价于一个模态逻辑公式的翻译

例： Rxx

标准翻译

定义

给定模态逻辑语言类型 τ。令 C 是 τ-模型类，K 是 C 的子类，Γ 是 τ-公式集。我们称 Γ 在 C 中定义了 K，当且仅当对任意 $\mathfrak{M} \in$ C，$\mathfrak{M} \in$ K 当且仅当 $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$。

如果 C 是所有 τ-模型组成的类，则称 Γ 定义了 K 或 Γ 刻画了 K

标准翻译

显然，如果模型类 K 是模态逻辑公式（集）可定义的，那么它也是一阶逻辑公式（集）可定义的，也即（广义）初等类。我们将在之后的课程中用模型论工具刻画模态逻辑公式集可定义的模型类。

Hennessy-Milner 类

回忆: 如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是相有穷的，那么模态等价关系就是互模拟

定义

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-模型类 K。我们称 K 是一个 Hennessy-Milner 类，或称 K 有 Hennessy-Milner 性质，当且仅当对任意 K 中模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$，以及分别在它们中的状态 w, w' 有，$w \leftrightsquigarrow w'$ 蕴含 $w \leftrightarrows w'$

模态饱和

定义

考虑基本模态逻辑语言 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对 $X \subset W$ 和公式集 Σ。

- 称 Σ 在 X 中可满足，当且仅当存在 $x \in X$ 使得，对所有 $\phi \in \Sigma$ 有 $\mathfrak{M}, x \Vdash \phi$。
- 称 Σ 在 X 中有穷可满足，当且仅当 Σ 的每个有穷子集在 X 中可满足

模态饱和

定义

考虑基本模态逻辑语言 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和公式集 Σ。称模型 $\mathfrak{M}$ 是 **模态饱和的** （modally saturated, m-saturated），当且仅当对任意 $w \in W$ 任意公式集 Σ，如果 Σ 在 $R[w] = \{v \in W \mid Rwv\}$ 中有穷可满足，那么 Σ 在 $R[w]$ 可满足

模态饱和

定义

考虑任意模态逻辑语言 τ。我们称一个 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 是 模态饱和的，当且仅当对任意 $\mathfrak{M}$ 中状态 w，任意 n 元模态词 $\triangle\in\tau$，以及任意公式集序列 $\Sigma_1,\dots,\Sigma_n$，如果对任意有穷公式集序列 $\Delta_1\subset\Sigma_1,\dots,\Delta_n\subset\Sigma_n$ 都有状态 $v_1,\dots,v_n$ 使得 $R_\triangle wv_1\dots v_n$ 且 $v_i\Vdash\Delta_i$（$1\le i\le n$），那么存在状态 $v_1,\dots,v_n$ 使得 $R_\triangle wv_1\dots v_n$ 且 $v_i\Vdash\Sigma_i$（$1\le i\le n$）

模态饱和

事实

给定模态逻辑语言类型 τ。所有模态饱和的 τ-模型组成的类具有 Hennessy-Milner 性质

证明.

滤和超滤

定义

任给非空集合 W，定义 F 是 W 上的滤 (filter)，若 $F \subset P(W)$ 且满足

- $W \in F$，$\emptyset \notin F$
- 对任意 $X, Y \in F$，$X \cap Y \in F$
- 对任意 $X \in F$ 任意 $Z \subset W$ 且 $Z \supset X$，$Z \in F$

我们称 W 上的滤 U 是超滤 (ultrafilter)，当且仅当对任意 $X \subset W$，$X \notin U$ 蕴含 $(W \setminus X) \in U$

定义

- 令 W 是一个非空集合，$E \subset P(W)$。我们称 E 有有穷交性质，当且仅当 E 中任意有穷多个元素的交非空。
- 假设 $E \subset P(W)$ 有有穷交性质，称

$$F = \{Y \subset W \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 和 } X_1, \ldots X_n \in E \text{ 有 } Y \supset \bigcap_{1 \le i \le n} X_i\}$$

$$= \bigcap \{G \mid E \subset G \text{ 且 } G \text{ 是 } W \text{ 上的滤}\}$$

是由 E 生成的 W 上的滤

定理 (超滤存在)

对任意非空集合 W，任意 W 上的滤 F，存在 W 上的超滤 $U \supset F$。因而，任何具有有穷交性质的 $E \subset P(W)$ 都可以扩张为一个超滤。

习题

- 2.4.3, 2.4.5

下期预告

- 超滤扩张
- van Benthem 刻画定理