模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 树展开 $\Rightarrow$ 互模拟
- 模态公式的深度与模型的高度

$$w \leftrightarrows_n w' \iff w \leftrightsquigarrow_n w'$$

有穷模型性

定义

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ，令 $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, V)$ 是一个以 w 为根的点生成模型。

- 递归定义 $H_0 = \{w\}$，$H_{k+1} = \{u \in W \mid$ 存在 R_i，存在 $v \in H_k$ 有 $vR_iu\} \setminus \bigcup_{j\leq k} H_j$。称 H_k 中元素为 W 中 **高度为 k** 状态，若 $u \in H_k$，记 $h(u) = k$。定义 $\mathfrak{M}$ 的 **高度** 为其中状态的最高高度（如果存在）。
- 对 $k \in \mathbb{N}$，定义 $\mathfrak{M}{\upharpoonright}k$ 为 $\mathfrak{M}$ 限制在 $W_k = \bigcup_{j\leq k} H_j$ 上的子模型

有穷模型性

事实

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ，令 $\mathfrak{M}$ 是一个点生成模型。对任意 k 以及 $\mathfrak{M}{\restriction}k$ 中状态 u 有，

$\mathfrak{M}{\restriction}k, u \leftrightharpoons_{k-h(u)} \mathfrak{M}, u$

证明.

对 $i \leq k$ 定义 $Z_i = \{(v, v) \in W_k \times W \mid h(v) \leq k - i\}$。对 $u \in W_k$，$u \in Z_{h(u)}$，验证 $Z_0, \ldots, Z_{k-h(u)}$ 构成 $(k - h(u))$-互模拟。

有穷模型性

推论

一个（只含一元模态词的）模态逻辑公式是可满足的，当且仅当它在一个点生成模型在有穷高度的限制中可满足

有穷模型性

定理

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ，令 ϕ 是一个 τ-公式。如果 ϕ 是可满足的，那么它在一个有穷模型中可满足

证明.

点生成树形模型 $+$ 砍到有穷高度 $+$ 点选择

前情提要

点选择证明的问题：点选择不一定能保持原模型框架的一些性质，无法被用作证明相对特殊框架类（如，自返、对称等）的有穷模型性

定义 (子公式封闭)

我们称公式集 Σ 是 子公式封闭的 ， 当且仅当

- $\neg\phi \in \Sigma$ 蕴含 $\phi \in \Sigma$
- $\phi \vee \psi \in \Sigma$ 蕴含 $\phi, \psi \in \Sigma$
- $\triangle\,(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \Sigma$ 蕴含每个 $\phi_i \in \Sigma$ $(1 \leq i \leq n)$

定义

任给子公式封闭的公式集 Σ 和模型 $\mathfrak{M}$，定义 $\mathfrak{M}$ 中状态间的关系：

$$w \leftrightsquigarrow_{\Sigma} v \text{ 当且仅当，对任意 } \phi \in \Sigma \text{ 有 } w \Vdash \phi \iff v \Vdash \phi$$

显然，$\leftrightsquigarrow_{\Sigma}$ 是等价关系。定义 $|w|_{\Sigma}$（常简记为 $|w|$）是以 w 为代表的 $\leftrightsquigarrow_{\Sigma}$ 等价类

过滤

定义 (过滤)

现考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。我们称满足下述条件的模型 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个 Σ 过滤 。

- $W' = W_\Sigma = \{|w|_\Sigma \mid w \in W\}$
- 对任意 $w, v \in W$，Rwv 蕴含 $R'|w||v|$ R' 的下界
- 对任意 $w, v \in W$，若 $R'|w||v|$，则对任意 $\Diamond\phi \in \Sigma$，$v \Vdash \phi$ 蕴含 $w \Vdash \Diamond\phi$ R' 的上界
- 对任意 $p \in \Sigma$，$V'(p) = \{|w| \mid w \Vdash p\}$

过滤

例

考虑 $(\mathbb{N}, R, V)$，其中

$R = \{(0,1),(0,2),(1,3)\} \cup \{(n, n+1) \mid n \geq 2\}$，$V(p) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$，$V(q) = \{2\}$。令 $\Sigma = \{\Diamond p, p\}$

事实

考虑基本模态逻辑语言。令 Σ 是子公式封闭的有穷公式集。对任何模型 $\mathfrak{M}$，如果 $\mathfrak{M}^f$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个 Σ 过滤，那么 $\mathfrak{M}^f$ 中至多有 $2^{|\Sigma|}$ 个状态。

过滤

定理 (过滤定理)

考虑基本模态逻辑语言。令 $\mathfrak{M}' = (W_\Sigma, R', V')$ 是模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 的一个 Σ 过滤。那么对任意 $w \in W$,

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_\Sigma \mathfrak{M}', |w|$$

过滤

过滤存在: 给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和子公式封闭公式集 Σ，定义

- 最小过滤：$R^s|w||v|$，当且仅当存在 $w' \in |w|, v' \in |v|$ 有 $Rw'v'$
- 最大过滤：$R^l|w||v|$，当且仅当对任意 $\Diamond\phi \in \Sigma$ 有，$v \Vdash \phi$ 蕴含 $w \Vdash \Diamond\phi$

定理 (有穷模型性——过滤)

- 对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ，如果 ϕ 可满足，那么存在一个至多包含 2^m 个状态的有穷模型满足 ϕ。其中 m 是 ϕ 子公式的个数。
- 进一步如果 ϕ 在一个自反/右无界/对称/传递的模型中可满足，那么 ϕ 也在一个满足相应性质的有穷模型中可满足

过滤

证明.

- 自返、右无界：在任何过滤下保持
- 对称：最小过滤下保持
- 传递性：考虑 W_Σ 上的关系

$R^t|w||v|$，当且仅当对任意 $\Diamond\phi \in \Sigma$，$v \Vdash \phi \vee \Diamond\phi$ 蕴含 $w \Vdash \Diamond\phi$

定义 (簇)

任给基本模态逻辑语言框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$。我们称 $C \subset W$ 是一个 (W, R) 上的 簇 （cluster），当且仅当 R 是 C 上的一个等价关系，且对任意 $D \supsetneq C$，R 不是 D 上的等价关系

例

假设 $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ 是 $(\mathbb{Q}, <, V)$ 的一个有穷传递过滤。定义 $\mathbb{Q}$ 上关系 $R' = \{(x, y) \mid R^f|x||y|\}$。$(\mathbb{Q}, R')$ 上有有穷个簇或单点集。

过滤

定义 (过滤——一般模态逻辑语言)

其中“上界”“下界”分别是：对任意 $w, v_1, \ldots, v_n \in W$，

- $R_\triangle w v_1 \ldots v_n$ 蕴含 $R'|w||v_1|\ldots|v_n|$
- 若 $R'|w||v_1|\ldots|v_n|$，则对任意 $\triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \Sigma$，$v_i \Vdash \phi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ 蕴含 $w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n)$

习题

- 2.3.7, 2.3.8 (errata)

下期预告

- 标准翻译