模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 模态不变性
  - 不交并
  - 生成子模型
  - 满同态
- 互模拟与模态等价

互模拟

定义

给定模态语言类型 τ，我们称 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 是 相有穷的 （image-finite），当且仅当对每个 $\mathfrak{M}$ 中 $n+1$ 元关系 R 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w，$\{(v_1,\ldots,v_n) \mid Rwv_1\ldots v_n\}$ 是有穷的。

定理

如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是两个相有穷的 τ-模型，那么对任意 $w \in W$ 和 $w' \in W'$ 有

$$w \leftrightarrows w' \iff w \leftrightsquigarrow w'$$

树展开

定义

- 我们称严格 偏序 (W,R) 是 树，当且仅当对任意 $w \in W$，R 在 $\{v \in W \mid vRw\}$ 上是良序
- 考虑结构 $(W,R_i)_{i\in I}$，其中每个 $i \in I$ 都是二元关系。我们称 $(W,R_i)_{i\in I}$ 是 树形的 （tree-like），当且仅当 (W,R) 是树，其中 R 是 $\bigcup_i R_i$ 的 传递闭包

树展开

事实

考虑模态逻辑语言类型 τ，其中只含有一些一元模态词 $\{\Delta_i\}_{i\in I}$。τ-模型 $\mathfrak{M} = (W, R_i, V)_{i\in I}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w，存在一个点生成的树形的模型 $\mathfrak{M}'$ 以及 $\mathfrak{M}'$ 的根 w' 使得，

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$$

有穷模型性

给定模态逻辑语言类型 τ，令 M 是一个 τ-模型类。

- 我们称 τ 对 M 而言有有穷模型性 （finite model property)，当且仅当对任意 τ-公式 ϕ，如果 ϕ 在 M 中的某个模型上可满足，那么 ϕ 在 M 中的某个有穷模型上可满足。
- 我们称 τ 有有穷模型性 ，当且仅当 τ 对所有 τ-模型组成的类而言有有穷模型性

有穷模型性

有穷模型性意味着:

- 语言表达能力不足以迫使其模型是无穷的
- 往往会有可判定性

有穷模型性

定义（（模态词的）深度）

我们定义个模态逻辑公式的 深度 （degree）如下

$$\deg(p) = 0$$

$$\deg(\bot) = 0$$

$$\deg(\neg\phi) = \deg(\phi)$$

$$\deg(\phi \vee \psi) = \max\{\deg(\phi), \deg(\psi)\}$$

$$\deg(\triangle\ (\phi_1, \ldots, \phi_n)) = 1 + \max\{\deg(\phi_1), \ldots . \deg(\phi_n)\}$$

特别地，$\deg(\Diamond\phi) = 1 + \deg(\phi)$

有穷模型性

事实

令 τ 是一个有穷的模态语言类型，并且假设命题符号集 Φ 也是有穷的，那么

- 对任意 n，在模命题逻辑等价意义上，只有有穷多个深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ)- 公式
- 对任意 n，任意 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w，在 w 上满足的所有深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ)-公式集命题逻辑地等价于一个公式

有穷模型性

注意: 模态逻辑语言下的命题逻辑需要添加 “等价替换规则”： 如果 $\varphi \dashv\vdash_{\mathbf{PL}} \psi$，那么 $\Diamond\varphi \vdash_{\mathbf{PL}} \Diamond\psi$ （基本模态逻辑语言）

证明.

有穷模型性

定义 (n-互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的 w 和 w'。对 $n \in \mathbb{N}$，称 w 与 w' 是 n-互模拟的，记作 $w \leftrightarrows_n w'$，当且仅当存在一个二元关系序列 $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$ 满足：

- wZ_nw'
- 如果 vZ_0v'，则对命题符号的赋值在 v 和 v' 上相同
- 对 $i < n$，如果 $vZ_{i+1}v'$ 且 Rvu，则存在 u' 有 $Rv'u'$ 且 uZ_iu'

定义 (n-互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的 w 和 w'。对 $n \in \mathbb{N}$，称 w 与 w' 是 n-互模拟的，记作 $w \leftrightarrows_n w'$，当且仅当存在一个二元关系序列 $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$ 满足：

- wZ_nw'
- 如果 vZ_0v'，则对命题符号的赋值在 v 和 v' 上相同
- 对 $i < n$，如果 $vZ_{i+1}v'$ 且 $Rv'u'$，则存在 u 有 Rvu 且 uZ_iu'

事实

给定基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的 w 和 w'。

- 如果 $w \leftrightarrows_{n+1} w'$，那么 $w \leftrightarrows_n w'$
- 如果 $w \leftrightarrows w'$，那么对任意 n 有 $w \leftrightarrows_n w'$。反之未必成立。

（习题）一般模态语言类型的 n-互模拟定义

有穷模型性

定义

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ，令 $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, V)$ 是一个以 w 为根的点生成模型。

- 递归定义 $H_0 = \{w\}$，$H_{k+1} = \{u \in W \mid$ 存在 R_i，存在 $v \in H_k$ 有 $vR_iu\} \setminus \bigcup_{j \le k} H_j$。称 H_k 中元素为 W 中 高度为 k 状态。定义 $\mathfrak{M}$ 的 高度 为其中状态的最高高度 (如果存在)。
- 对 $k \in \mathbb{N}$，定义 $\mathfrak{M}\restriction k$ 为 $\mathfrak{M}$ 限制在 $W_k = \bigcup_{j \le k} H_j$ 上的子模型

有穷模型性

事实

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ，令 $\mathfrak{M}$ 是一个点生成模型。对任意 k 以及 $\mathfrak{M}{\restriction}k$ 中状态 u 有，

$\mathfrak{M}{\restriction}k, u \leftrightharpoons_{k-u \text{ 的高度}} \mathfrak{M}, u$

推论

一个（只含一元模态词的）模态逻辑公式是可满足的，当且仅当它在一个点生成模型在有穷高度的限制中可满足

有穷模型性

定理

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ，令 ϕ 是一个 τ-公式。如果 ϕ 是可满足的，那么它在一个有穷模型中可满足

证明.

点生成树形模型 $+$ 砍到有穷高度 $+$ 点选择

习题

- 2.1.7
- 给出一般模态语言类型的 n-互模拟的定义

下期预告

- 过滤法构造有穷模型