模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年秋季

前情提要

- 模态逻辑的语言，模态语言类型
- 框架与模型
- 模态逻辑的语义概念：$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ)- 模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同：

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta\,(\phi_1, \ldots, \phi_n) \;\Leftrightarrow\; \text{存在 } v_1, \ldots, v_n \in W \text{ 使得 } R_\Delta w v_1 \ldots v_n$$

$$\text{且对任意 } 1 \leq i \leq n \text{ 有 } \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ)- 模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同：

一般用 $\triangledown$ 表示 $\vartriangle$ 的对偶

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangledown(\phi_1, \ldots, \phi_n) \quad \Leftrightarrow \quad ?$$

模型与框架

回忆: 命题逻辑重言式与一阶谓词逻辑有效性

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 中的状态 w 上有效 （valid)，记作 $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$，当且仅当对每个赋值 V 有 $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \phi$
- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效，记作 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ 中的每个状态 w 上有效

模型与框架

例

考虑框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$，其中 $W = \{a, b\}, R = \{(a, a), (b, a)\}$，考虑公式

- $p \to \Diamond p$

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 令 F 是一个 τ-框架类，称公式 ϕ 在框架类 F 上有效，记作 F $\Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在 F 中的每个框架上有效。我们用 Λ_{F} 表示所有在 F 上有效的公式组成的集合，并称之为 F 的逻辑 (logic of F)
- 称 ϕ 有效，记作 $\Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在所有 τ- 框架上有效。

模型与框架

例

- $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$
- $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
    - 考虑传递框架类

例

- $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
- $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
  - 考虑传递框架类

模态语义后承

记法

- 如果 S 是模型类，称 $\mathfrak{M}$ 是 来自 S 的模型 ，即 $\mathfrak{M} \in S$
- 如果 S 是框架类，称 $\mathfrak{M}$ 是 来自 S 的模型 ，即 $\mathfrak{M}$ 是 S 中某个框架基础上的模型
- 给定模态逻辑语言类型 τ，当我们提到一个 τ-结构类 S，要么 S 是一个 τ-模型类，要么是一个 τ-框架类

模态语义后承

定义 (局部语义后承)

给定模态语言类型 τ，和 τ-结构类 S。令 Σ 和 ϕ 分别是语言 $ML(\tau,\Phi)$ 的公式集和公式。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的局部语义后承，记作 $\Sigma \Vdash_S \phi$，当且仅当对任意来自 S 的模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中的任何状态 w 有，$\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

模态语义后承

例

- $\Diamond\Diamond p \Vdash_{\mathsf{Tran}} \Diamond p$（Tran 是传递框架类）
- $p \Vdash_{\mathsf{S}} \neg p$，其中 S 是基本模态逻辑的模型类：

$$\mathsf{S} = \{(\mathfrak{F}, V) \mid V(p) = \emptyset\}$$

模态语义后承

定义 (全局语义后承)

同样给定 $\tau, \mathsf{S}, \Sigma, \phi$。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的全局语义后承，记作 $\Sigma \Vdash^g_{\mathsf{S}} \phi$，当且仅当对每个来自 S 的结构 $\mathfrak{S}$ 都有，$\mathfrak{S} \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{S} \Vdash \phi$

例

$p \Vdash^g_{\mathsf{S}} \Box p$，其中 S 可以是任何结构类

注意：我们一般关心基于框架类的局部语义后承。$\Vdash_{\mathsf{S}} \varphi$ 和 $\Vdash^g_{\mathsf{S}} \varphi$ 有区别吗?

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

定义

- **K** 的公理包括
  - 所有命题重言式例式

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(Dual) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

定义

- **K** 的证明规则 包括
  - 分离规则（*modus ponens*）：由 ϕ 和 $\phi \to \psi$ 可证 ψ
  - 必然化规则 （generalization）：由 ϕ 可证 $\Box\phi$
  - 统一代入规则 （uniform substitution）：由 ϕ 可证 ϕ^σ

K-系统

定义

- 定义一个 **K**-证明 为一个有穷公式序列，其中每条公式要么是 **K** 的公理，要么是由之前的公式应用 **K** 中证明规则得到的。
- 我们称一个公式 ϕ 是 **K**-可证的，当且仅当 ϕ 是某个 **K**-证明的最后一条公式，记作 $\vdash_{\mathbf{K}} \phi$

K-系统

例

- $p \to (q \to (p \wedge q))$
- $\Box(p \to (q \to (p \wedge q)))$
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- $\Box(p \to (q \to (p \wedge q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q)))$
- $\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q))$
- $\Box(p \to (p \wedge q)) \to (\Box p \to \Box(p \wedge q))$
- $\Box p \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$，即 $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$

K 的可靠性

- 所有命题逻辑重言式例式、(Dual)和(K)都是有效的
- 分离规则保持框架类，框架全局/局部有效性，模型全局真和局部真（满足）
- 统一代入保持框架类，框架全局/局部有效性，不保持模型全局真或局部真
- 必然化规则保持框架类，框架（全局）有效性，模型全局真，不保持框架局部有效性或模型局部真

K 的可靠性

我们一般期望用模态逻辑公理系统来刻画（框架类）有效性

事实

K 是（针对所有框架类）可靠的，即对任意框架 $\mathfrak{F}$，$\vdash_{\mathbf{K}} \phi$ 蕴含 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$

事实上，**K** 也是（针对所有框架类）完全的。在这个意义上，我们称 **K** 是（克里普克语义学意义上）极小的模态逻辑公理系统

正规模态逻辑

定义 (正规模态逻辑)

我们定义 正规模态逻辑 （normal modal logic）为一个公式集 Λ，它包含所有的命题逻辑重言式例式、(**K**)、(Dual) 并且在分离规则、统一替换规则和必然化规则下封闭。

例

- **K** 是最小的正规模态逻辑
- **K4** 是 **K** 的基础上添加公理 $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ 得到的
- 令 F 是所有基本模态逻辑框架组成的框架类，定义

$$\Lambda_{\mathsf{F}} = \{\phi \mid \mathsf{F} \Vdash \phi\}$$

则 Λ_{F} 是一个正规模态逻辑

模态不变性

回忆: 一阶谓词逻辑表达力的界限：同态、同构、子模型、初等等价

不变性（invariance）结果刻画了一种人工语言的表达力界限，同时勾勒出所关心的研究领域

模态不变性

定义

- 给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的状态 w 和 w'。定义 w 的 τ-理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$。我们称 w 和 w' 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightsquigarrow w'$，当且仅当它们有相同的 τ-理论
- 我们定义模型 $\mathfrak{M}$ 的 τ-理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$。我们称模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}$，当且仅当它们有相同的 τ-理论

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ，索引集 I。对每个 $i \in I$，$\mathfrak{M}_i$ 是一个 τ-模型。对任意 $i \in I$ 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有

$$\mathfrak{M}_i, w \leftrightsquigarrow \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w$$

即不交并保持模态不变性

证明.

对 τ-公式复杂度归纳证明

下期预告

- 模态不变性与互模拟
- 有穷模型性