可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 对每个 01 序列 A 都存在马丁-洛夫随机序列 Z 有 $A \leq_T Z$
- 相对于 A 马丁-洛夫测试 / 随机的
- 给定序列 A、B。$A \oplus B$ 是马丁-洛夫随机的，当且仅当 B 是马丁-洛夫随机的并且 A 是相对于 B 马丁-洛夫随机的。
- 2-随机 的序列都是广义低效的

更弱的随机性概念

回忆: Z 是马丁-洛夫随机的，当且仅当对任何 c.e. 的（上）鞅 d，$Z \notin S[d]$

如果 d 仅仅是 c.e. 的（上）鞅，按照这个策略可能永远无法真正“买定离手”。我们希望除了可以能行地知道至少应该押注多少，至少还可以能行地知道至多应该押注多少。

可计算随机

定义

我们称一个（上）鞅是 可计算的 ，当且仅当它的值是统一地递归的，即存在一个递归函数 $p : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$，任给 $\sigma \in 2^{<\omega}$，程序 $\Phi_{p(\sigma)}$ 可以判定一个二进有理数是否小于 $d(\sigma)$。

如果 d 是可计算的，那么对任意有理数 r，任意 $n > 0$，可以能行地判定是否 $r \in (d(\sigma) - 2^{-n}, d(\sigma) + 2^{-n})$

可计算随机

我们可以仅用有理数值的可计算函数模拟任意可计算的鞅，从而做到“买定离手”

引理

对每个可计算的鞅 $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 存在可计算函数 $f : 2^{<\omega} \to \mathbb{Q}^{\geq 0}$，$f$ 是鞅且 $S[f] = S[d]$

可计算随机

定义

我们称序列 $Z \in 2^\omega$ 是 可计算随机的 ， 当且仅当不存在可计算的鞅可以在 Z 上获胜。

- 对每个可计算的上鞅都存在一个可计算的鞅处处占优，所以将定义中的 “鞅” 替换为 “上鞅” 得到的定义是等价的
- 马丁-洛夫随机 $\Rightarrow$ 可计算随机

施诺尔随机性

可计算的鞅无法保证何时获得给定量的收益

定义 (施诺尔随机性)

- 令 d 是一个鞅，$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个严格递增函数。称 d 在序列 Z 上 g 获胜，当且仅当存在无穷 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $d(Z \upharpoonright g(n)) \geq n$
- 令 $S_g[d]$ 是所有 d 在其上 g 获胜的序列组成的集合；
- 称序列 $Z \in 2^\omega$ 是 施诺尔随机的，当且仅当对任意可计算的鞅 d 任意可计算的严格递增函数 g，d 都不在 Z 上 g 获胜，即 $Z \notin S_g[d]$

施诺尔随机性

施诺尔随机性仍然满足我们对随机性的一些直观。例如，存在等价的基于统计学测试的刻画

定义

我们称一个马丁-洛夫测试 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 **施诺尔测试** ，当且仅当 $\{\lambda(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是统一地可计算的

施诺尔随机性

定理

序列 Z 是施诺尔随机的，当且仅当对任意施诺尔测试 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$Z \notin \bigcap_n U_n$

施诺尔随机性

在上面的证明中，我们只需要 Z 属于无穷个 U_n 就可以证明 Z 不是施诺尔随机的。因而：

推论

序列 Z 不是施诺尔随机的，当且仅当存在施诺尔测试 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得存在无穷个 n 有 $Z \in U_n$

施诺尔随机性

容易验证，有关例子中的马丁-洛夫测试都是施诺尔测试，因而：

- 施诺尔随机序列都满足大数定律
- 可计算序列都不是施诺尔随机的

施诺尔随机性

事实

不存在通用施诺尔测试

证明.

任给施诺尔测试 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。由于 $\lambda(U_1) \leq 2^{-1}$ 是一个可计算实数。我们可以能行地找到最短的 σ_0 使得 $[\sigma_0] \not\subset U_1$，并由此递归地找到 $\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots$ 都满足 $[\sigma_i] \not\subset U_1$。$Z = \bigcup_i \sigma_i$ 是一个通过测试 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的可计算序列

非马丁-洛夫随机的可计算随机

马丁-洛夫随机 $\Rightarrow$ 可计算随机 $\Rightarrow$ 施诺尔随机

非马丁-洛夫随机的可计算随机

马丁-洛夫随机 $\not\Leftarrow$ 可计算随机 $\not\Leftarrow$ 施诺尔随机

非马丁-洛夫随机的可计算随机

定理

假设 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是非降的（$n_1 < n_2 \Rightarrow h(n_0) \le h(n_1)$）、无界的（$\lim_{n\to\infty} h(n)=\infty$）递归函数。那么存在一个可计算随机的序列 Z 使得对几乎所有 $n\in\mathbb{N}$,

$$K(Z\restriction n|n) \le h(n)。$$

特别地，令 $h(n)=\log n$。因而，对几乎所有 $n\in\mathbb{N}$, $K(Z\restriction n) \le 3\log n$。

非马丁-洛夫随机的可计算随机

定义

一个 **部分可计算鞅** 是一个部分递归函数 $p : 2^{<\omega} \to \mathbb{Q}$ 并且满足：对任意 $\tau \in \operatorname{dom} p$，

- 对任意 $\sigma \prec \tau$ 有 $\sigma \in \operatorname{dom} p$
- $\tau 0 \in \operatorname{dom} p$ 当且仅当 $\tau 1 \in \operatorname{dom} p$
- 若 $\tau, \tau 0, \tau 1 \in p$，则满足 $p(\tau 0) + p(\tau 1) = 2p(\tau)$

施诺尔随机与高效性

与低效性相对，经典递归论中还存在一组高效性概念

定义

称一个 Δ^0_2 集合 A 是 **高效的** （high），当且仅当 $\emptyset'' \leq_T A'$

高效的集合类似 $\emptyset'$，直观上是作为信息源很有用的集合

施诺尔随机与高效性

引理

集合 A 是高效的，当且仅当存在函数 $f \leq_T A$ 控制（dominate）所有可计算函数

定理

如果序列 Z 是施诺尔随机的，并且 Z 不是高效的，那么 Z 就是马丁-洛夫随机的

谢谢！