可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 鞅、上鞅、获胜集、c.e. 的（上）鞅
- 序列 Z 是马丁-洛夫随机的，当且仅当不存在 c.e. 的（上）鞅在 Z 上获胜
- 存在通用 c.e. 鞅和上鞅，存在最优 c.e. 上鞅，不存在最优 c.e. 鞅

马丁-洛夫随机太弱了

关于随机序列的直观

- 随机序列不应该是左 c.e. 的

  Ω 是马丁-洛夫随机的

- 随机序列作为信息源应该是很“没用的”

马丁-洛夫随机太弱了

关于随机序列的直观

- 随机序列不应该是左 c.e. 的

  Ω 是马丁-洛夫随机的

- 随机序列作为信息源应该是很“没用的”

马丁-洛夫随机太弱了

定理 (Kučera and Gács)

对每个 01 序列 A 都存在马丁-洛夫随机序列 Z 有 $A \leq_T Z$

我们先证个引理

马丁-洛夫随机太弱了

引理

给定 可测的 集合 $S \subset 2^{\omega}$。对任意 $\sigma \in 2^{<\omega}$，任意 $r \in \mathbb{N}$，如果 $\lambda(S \cap [\sigma]) \geq 2^{-(r+1)} \cdot 2^{-|\sigma|}$，那么存在不同的 $\tau_0, \tau_1 > \sigma$ 满足 $|\tau_0| = |\tau_1| = |\sigma| + r + 2$ 且对 $i = 0, 1$ 都有

$$\lambda(S \cap [\tau_i]) > 2^{-(r+2)} \cdot 2^{-|\tau_i|}$$

马丁-洛夫随机太弱了

定理 (Kučera and Gács)

对每个 01 序列 A 都存在马丁-洛夫随机序列 Z 有 $A \leq_T Z$

相对马丁-洛夫随机

定义

我们称开集序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 统一地递归可枚举于 A 的，当且仅当集合 $\{\langle n,\sigma\rangle \mid [\sigma]\subset U_n\}$ 是递归可枚举于 A 的，即存在 e 使得 $\{\langle n,\sigma\rangle \mid [\sigma]\subset U_n\} = \operatorname{dom}\Phi_e^A$

相对马丁-洛夫随机

定义

- 若 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是统一地递归可枚举于 A 的开集序列且对任意 n 有 $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$，则称 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 相对于 A 的马丁-洛夫测试
- 我们称序列 Z 是 相对于 A 马丁-洛夫随机的，当且仅当它通过所有相对于 A 的马丁-洛夫测试，即对每个相对于 A 的马丁-洛夫测试 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都有 $Z \notin \bigcap_n U_n$

相对马丁-洛夫随机

引理 (信息源版本的通用马丁-洛夫测试)

- 存在可计算函数 $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。对任意信息源 $A \in 2^\omega$ 任意 $e, n \in \mathbb{N}$，$W^A_{g(e,n)}$ 是一集无前束的集合，$\lambda([W^A_{g(e,n)}]^\prec) \leq 2^{-n}$。并且对任意相对于 A 的马丁-洛夫测试 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都存在 e 使得对任意 n 有 $V_n = [W^A_{g(e,n)}]^\prec$

相对马丁-洛夫随机

引理 (信息源版本的通用马丁-洛夫测试)

- 存在信息源版本的通用马丁-洛夫测试。即存在可计算函数 f，对任意 $A \in 2^\omega$，$\{[W^A_{f(n)}]^\prec\}_n$ 是一个相对于 A 的马丁-洛夫测试，并且对任何相对于 A 的马丁-洛夫测试 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有，$\bigcap_n V_n \subset \bigcap_n [W^A_{f(n)}]^\prec$。

相对马丁-洛夫随机

带信息源的无前束程序 就是一台带信息源的图灵机并且其定义域总是无前束的。定义

$$K_M^A(\tau) = K_{M^A}(\tau) = \min\left\{|\sigma| \,\middle|\, M^A(\sigma) = \tau\right\}$$

其中 M 是带信息源的无前束程序，A 是信息源。

注意: 与相对柯尔莫哥洛夫复杂度的区别

相对马丁-洛夫随机

我们同样可以能行地枚举所有带信息源的无前束程序，并由此得到一个带信息源的通用无前束程序，亦记作 U^{pf}。由此，可以定义

$$K^A(\tau) = K^A_{U^{\mathrm{pf}}}(\tau)$$

相对马丁-洛夫随机

可以相对化地定义一个（上）鞅 $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是 递归可枚举于 A 的，当且仅当它的值是可以统一地左 c.e. 于 A 的，也即我们可以借助信息源 A 枚举比 d 的值小的（二进）有理数。

相对马丁-洛夫随机

定理

给定序列 A、Z。下列命题等价

- Z 是相对于 A 马丁-洛夫随机的;
- 存在常量 c 使得对任意 n 都有

$$K^A(Z\upharpoonright n) \geq n - c$$

- 不存在递归可枚举于 A 的（上）鞅 d 使得 $Z \in S[d]$

相对马丁-洛夫随机

随机性相对化与经典递归论有着密切的联系

事实

如果 $Z \leq_T A$，那么 Z 不是相对于 A 马丁-洛夫随机的的。

相对马丁-洛夫随机

引理 (van Lambalgen)

给定序列 A、B。$A \oplus B$ 是马丁-洛夫随机的，当且仅当 B 是马丁-洛夫随机的并且 A 是相对于 B 马丁-洛夫随机的。

相对马丁-洛夫随机

推论

对任意序列 A 和 B，如果 $A \oplus B$ 是马丁-洛夫随机的，那么 $A \perp_T B$，即 $A \not\leq_T B$ 且 $B \not\leq_T A$。

推论

假设序列 A 和 B 都是马丁-洛夫随机的。那么，A 是相对于 B 马丁-洛夫随机的，当且仅当 B 是相对于 A 马丁-洛夫随机的

相对马丁-洛夫随机

回忆：

定义

- 我们称集合 A 是 低效的 ，当且仅当 $A' =_T \emptyset'$。
- 我们称集合（序列）A 是 广义低效的 ，当且仅当

$$A' \equiv_T A \oplus \emptyset'$$

相对马丁-洛夫随机

引理

任给序列 A、B。如果 A 是 Δ_2^0 的并且 A 是相对于 B 马丁-洛夫随机的，那么 B 是广义低效的的。

相对马丁-洛夫随机

定义

对 $n \geq 1$，我们称序列 $A \in 2^{\omega}$ 是 n-随机的，当且仅当 A 是相对于 $\emptyset^{(n-1)}$ 马丁-洛夫随机的。

注意: 1-随机即马丁-洛夫随机，与之前的定义相符

相对马丁-洛夫随机

事实

所有左 c.e. 的序列都 $\leq_T 0'$，因而不是 2-随机的。特别地，Ω 不是 2-随机的。

定理

如果序列 A 是 2-随机的，那么 A 是广义低效的

下期预告

- 更弱的随机性概念