可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 马丁-洛夫测试与马丁-洛夫随机
- 马丁-洛夫随机与 1-随机等价
- 通用马丁-洛夫测试
- 索罗维测试与索罗维随机

鞅与上鞅

定义

令 $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是以大于等于 0 的实数为值域的函数。

- 我们称 d 是一个 鞅 （martingale），当且仅当对任意 σ 有
$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$
- 我们称 d 是一个 上鞅 （supermartingale），当且仅当
$$d(\sigma) \geq \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

鞅与上鞅

定义

- 我们称一个（上）鞅 d 在序列 $Z \in 2^{\omega}$ 上 获胜， 当且仅当

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} d(Z \upharpoonright n) = \infty$$

- 定义（上）鞅 d 的 获胜集 为

$$S[d] = \{A \in 2^{\omega} : d \text{ 在 } A \text{ 上获胜}\}$$

鞅与上鞅

事实

- 假设 d 是一个（上）鞅，$r \in \mathbb{R}^+$ 是正实数，且函数 $f : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 满足 $f = r \cdot d$ （即：对所有 $\sigma \in 2^{<\omega}$，有 $f(\sigma) = r \cdot d(\sigma)$），那么 f 是一个（上）鞅，且 $S[d] = S[f]$。
- 若 $d_0, d_1, \cdots$ 是（上）鞅，并且 $\sum_n d_n(\emptyset) < \infty$，则 $\sum_n d_n$ (即函数 d，$d(\sigma) = \sum_n d_n(\sigma)$）也是（上）鞅。

鞅与上鞅

引理

假设 d 是一个（上）鞅。

1. 对任意 $\sigma \in 2^{<\omega}$、任意由 σ 的 尾节延伸 组成的无前束集合 S ，都有

$$\sum_{\tau \in S} 2^{-|\tau|} d(\tau) \leq 2^{-|\sigma|} d(\sigma)$$

2. 令 $E_k^d = \{\sigma : d(\sigma) \geq k\}$，则 $\lambda([E_k^d]^{\prec}) \leq d(\emptyset)/k$。

鞅与上鞅

定义

我们称一个（上）鞅是 c.e. 的，当且仅当它的值是统一地左 c.e. 的，即：存在递归函数 $p : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$，任给 $\sigma \in 2^{<\omega}$，c.e. 集合 $W_{p(\sigma)}$ 枚举所有小于 $d(\sigma)$ 的二进有理数。

鞅与上鞅

定理 (施诺尔)

序列 Z 是马丁-洛夫随机的，当且仅当不存在 c.e. 的（上）鞅在 Z 上获胜。

鞅与上鞅

事实

对任意 $\mathcal{A} \subset 2^\omega$，$\lambda(\mathcal{A}) = 0$（即存在开集序列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\lambda U_n \leq 2^{-n}$ 且 $A \subset \bigcap_n U_n$）当且仅当存在（上）鞅 d 使得 $\mathcal{A} \subset S[d]$

推论

存在 通用的 （universal）c.e. 鞅 d，即：对任何 c.e. 的鞅 f，都有 $S[f] \subset S[d]$。

鞅与上鞅

定义

定义 c.e. 的（上）鞅 d 是 最优的，当且仅当对任意 c.e. 的（上）鞅 f 存在常量 c_f，使得对任意 $\sigma \in 2^{<\omega}$，有 $c_f \cdot d(\sigma) \geq f(\sigma)$。

鞅与上鞅

事实

- 最优的 c.e.（上）鞅都是通用 c.e.（上）鞅
- 存在最优的递归可枚举上鞅
- 不存在对所有递归可枚举鞅的能行枚举，不存在最优的递归可枚举鞅

下期预告

- 更强的随机性概念