可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 无前束程序存在定理
- 1-随机：存在 d，任何前段都是 d 随机的
- 柴廷数 Ω：左 c.e.，$\Omega \equiv_T 0'$，Ω 是 1-随机的

统计学测试

随机序列必须满足一些统计学性质

例

无穷序列 A 中 1 出现的概率应该和 0 相同，都为 $1/2$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}A(i)}{n}=\frac{1}{2}$$

但 $01010101\ldots$ 显然不是随机的

统计学测试

例 (测试)

令 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个严格递增的可计算函数。一般认为，如果 A "每第 $f(i)$ 位都是 0"，那么 A 不是随机的。我们构造一个 测试 来排除这样的序列 A。对每个 k，测试是否有对任意 $i\le k$，$A(f(i))=0$。如果存在 $A(f(i))=1$，A 通过测试 。而随着 k 的增加，如果 A 仍未通过测试，我们就可以越来越准确地断言 A 不是随机的。

统计学测试

例 (测试)

对每个 k，令

$$U_k = \bigcap_{i\le k}[\{\sigma \in 2^{f(i)+1} : \sigma(f(i)) = 0\}]^{<}$$

若存在 k 使得 $A \notin U_k$，则 A 通过测试。如果 $A \in \bigcap_k U_k$，则 A 未通过测试，不是随机的。

注意: $\lambda(U_k) = 2^{-(k+1)}$，故 $\lambda(\bigcap_k U_k) = \lim_{k\to\infty} 2^{-k-1} = 0$

例 (大数定律)

随机序列应该满足大数定律。给定无论多小的正实数 ε，我们可以设计一个测试，来排除其中 1 的数量占比 $\geq 1/2+\varepsilon$ 的序列。对 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$C_m = \{\sigma \in 2^{m+1} : \frac{\sum_{i=0}^{m} \sigma(i)}{m+1} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$$

对 $n \in \mathbb{N}$，定义 $U_n = \bigcup_{m \geq n} [C_m]^{\prec}$。则 $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$

$\Leftrightarrow \ \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} A(i)}{n} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$

统计学测试

例 (大数定律)

根据 Hoeffding inequality

$$\lambda([C_m]^{\prec}) \leq (\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2})^m$$

因而

$$\lambda(U_n) \leq \frac{(\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2})^n}{1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon^2}},$$

$\lambda(\bigcap_n U_n) = 0$。

马丁-洛夫随机性

回忆: 请回忆在康托尔空间中，我们称集合 $U \subset 2^\omega$ 是 开集，当且仅当存在（无前束的）集合 $E \subset 2^{<\omega}$，使得 $U = [E]^{\prec}$

定义

称集合 $U \subset 2^\omega$ 是 递归可枚举开集 （c.e. open，或 Σ_1^0 集），当且仅当存在（无前束的）递归可枚举集 $E \subset 2^{<\omega}$，使得 $U = [E]^{\prec}$。称集合 P 是 余递归可枚举闭集 （co-c.e. closed，或 Π_1^0 集），当且仅当它的补集是递归可枚举开集。

马丁-洛夫随机性

定义

称开集序列 $\{U_n\}_{n\in\omega}$ 是 统一地递归可枚举的 ， 当且仅当集合

$$\{\langle n, \sigma\rangle \mid [\sigma] \subset U_n\}$$

是递归可枚举的

马丁-洛夫随机性

定义 (马丁-洛夫随机性)

1. 令 $\{U_n\}_{n<\omega}$ 是统一地递归可枚举的开集序列，并且若对任意 n 有 $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$，则称 $\{U_n\}_{n<\omega}$ 是一个 马丁-洛夫测试 （Martin-Löf test）
2. 称序列 $Z \in 2^\omega$ 通过马丁-洛夫测试 $\{U_n\}_{n<\omega}$ ，当且仅当 $Z \notin \bigcap_{n<\omega} U_n$；
3. 定义 $Z \in 2^\omega$ 是 马丁-洛夫随机的 （Martin-Löf random），当且仅当 Z 通过所有的马丁-洛夫测试。

马丁-洛夫随机性

注意：

- 马丁-洛夫测试定义中的有关能行性的限制是必要的，否则所有序列都不是随机的：令 $Z \in 2^\omega$ 是任意序列，$\{[Z \upharpoonright n]\}_n$ 本身就是一个开集序列。
- 可以减弱定义中关于 $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$ 的要求：存在以正有理数为值域的递归函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$，且 $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，有 $\lambda(U_n) \leq f(n)$
- 也可以增加要求：$U_0 \supset U_1 \supset \cdots$

马丁-洛夫随机性

例

假设 $Z \in 2^\omega$ 是可计算的。令 $U_n = [Z \upharpoonright n]$。显然，$\{U_n\}_{n<\omega}$ 是统一地递归可枚举的，并且 $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$。

所以可计算的序列都不是马丁-洛夫随机的

注意: 前面的例子已经表明，马丁-洛夫随机的序列都满足大数定律，并且不存在一个严格递增的可计算函数能只挑出 0 的位置

马丁-洛夫随机性

引理

M 是无前束程序。对 $k \in \mathbb{N}$，令 $S_k = \{\sigma : K_M(\sigma) \leq |\sigma| - k\}$，即 M-k-可压缩的字符串组成的集合，则

1. $\lambda([S_k]^{\prec}) \leq 2^{-k} \lambda([\operatorname{dom} M]^{\prec})$；
2. 对 $k \in \mathbb{N}$，$\lambda([S_k]^{\prec})$ 可以统一图灵归约于 $\lambda([\operatorname{dom} M]^{\prec})$。

马丁-洛夫随机性

定理

序列 Z 是马丁-洛夫随机的，当且仅当 Z 是 1-随机的。

马丁-洛夫随机性

定义

我们称一个马丁-洛夫测试 $\{U_n\}_{n\in\omega}$ 是 通用的马丁-洛夫测试，当且仅当对任意马丁-洛夫测试 $\{V_n\}_{n\in\omega}$，都有 $\bigcap_n V_n \subset \bigcap_n U_n$。

马丁-洛夫随机性

定理

存在通用马丁-洛夫测试

马丁-洛夫随机性

假设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个通用的马丁-洛夫测试，那么 $2^\omega \setminus \bigcap_n U_n$ 就是所有马丁-洛夫随机序列组成的集合

推论

令 MLR 是所有马丁-洛夫随机序列组成的集合，则 MLR 是一个 Σ^0_2 类，并且 $\lambda(\mathrm{MLR}) = 1$。

索罗维随机性

定义 (索罗维随机性)

- 令 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是统一地递归可枚举的开集序列，并且满足 $\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(S_n)<\infty$，则称 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 索罗维测试 。
- 我们称序列 Z 是 索罗维随机的 ，当且仅当对每个索罗维测试 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，至多存在有穷个 S_n 包含 Z。

索罗维随机性

定理

Z 是索罗维随机的，当且仅当 Z 是马丁-洛夫随机的

下期预告

- 基于不可预测的随机性概念