可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 不存在 c 使得 $C(\sigma,\tau) \leq C(\sigma) + C(\tau) + c$ 总成立
- 相对柯尔莫哥洛夫复杂度：

  $C(\sigma|\tau) = \min\{|\mu| : U^{\bar{\tau}}(\mu) = \sigma\}$
- C 的递归论性质：$C \leq_{wtt} 0'$，$0' \leq_{wtt} B \leq_{wtt} C$

前情回顾

- 无前束集合、无前束程序
- 通用无前束程序：$U^{\mathsf{pf}}(1^e 0\sigma) = \Psi_e(\sigma)$
- 柯尔莫哥洛夫复杂度：$K(\sigma) = K_{U^{\mathsf{pf}}}(\sigma) = C_{U^{\mathsf{pf}}}(\sigma)$
- K 的上界：$K(\sigma) \le 2|\sigma| + c$，

  $K(\sigma) \le K(|\sigma|) + |\sigma| + c_1 \le 2\log|\sigma| + |\sigma| + c_2$
- 但是对任意 d 存在 σ 使得：$K(\sigma) > |\sigma| + \log|\sigma| + d$
- 柴廷数：$\Omega = \lambda([\mathrm{dom}\, U^{\mathsf{pf}}]^{\prec}) \le 1$

无前束程序存在引理

记法

对任意无前束程序 M，令 $\Omega_M = \lambda([\mathrm{dom}\, M]^{\prec})$ 为 M 的 停机概率

显然，$\Omega_M \leq 1$

无前束程序存在引理

定义

令序列 $\{\langle d_i, \tau_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是可计算的，其中每个 $d_i \in \mathbb{N}$，$\tau_i \in 2^{<\omega}$。若 $\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-d_i} \leq 1$，则称 $\{\langle d_i, \tau_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个 请求序列

其中，我们称 $\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-d_i} \leq 1$ 为 份量条件 （weight condition）。即每个 τ_i 要求一个份量为 2^{-d_i} 的描述，但要求的总份量不能超过 1

无前束程序存在引理

引理 (列文-施诺尔-柴廷)

任给请求序列 $\{\langle d_i, \tau_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$，存在满足该请求序列的无前束程序 M，即：存在无前束集合 $\{\sigma_i : i < \mathbb{N}\} = \operatorname{dom} M$，且对任意 $i \in \mathbb{N}$ 有 $M(\sigma_i) = \tau_i$，$|\sigma_i| = d_i$

上述程序 M 可以能行地从请求序列（作为递归序列的某个编码）得到

无前束程序存在引理

推论

假设存在请求序列 $\{\langle d_i, \tau_i\rangle : i \in \mathbb{N}\}$，则存在常量 $c \in \mathbb{N}$，对 $i \in \mathbb{N}$，有

$$K(\tau_i) \leq d_i + c。$$

1-随机

定义

- 给定 $d \in \mathbb{N}$。我们称 01 串 σ 是 d-K-随机的，当且仅当
$$K(\sigma) \geq |\sigma| - d$$
- 我们称无穷 01 序列 $Z \in 2^{\omega}$ 是 1-随机的，当且仅当存在 $d \in \mathbb{N}$，使得 Z 的每个有穷前段都是 d 随机的，即对任意 $n \in \mathbb{N}$，有
$$K(Z \upharpoonright n) \geq n - d$$

1-随机

回忆:对任意 d，对任意无穷 01 序列 Z 总有一个前段 $\sigma \prec Z$，使得 $C(\sigma) < |\sigma| - d$

因而，如果把 1-随机定义中的 K 换成 C，就不存在 “ 1_C-随机的 ” 序列了

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

回忆: 柴廷数 $\Omega = \sum_{\tau \in \mathrm{dom}\, U^{\mathsf{pf}}} 2^{-|\tau|} = \lambda([\mathrm{dom}\, U^{\mathsf{pf}}]^{\prec})$

对 Ω “自下而上”能行的逼近: 对 $s \in \mathbb{N}$ 定义

$$\Omega_s = \lambda([\{\sigma : U_s^{\mathsf{pf}}(\sigma)\downarrow\}]^{\prec})$$

$s \mapsto \Omega_s$ 是可计算的，$\Omega_s \leq \Omega_{s+1} \leq \Omega$，并且 $\Omega = \lim_{s\to\infty} \Omega_s$

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

定义

对无穷序列 $Z \in 2^\omega$，令 $L(Z) = \{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L Z\}$，即完全二叉树中所有在无穷枝 Z “左侧”的字符串组成的集合。

事实

如果把 Ω 看作是它的二进制表示（一个无穷 01 序列），$L(\Omega)$ 是 c.e. 的

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

定义

我们称序列 $Z \in 2^\omega$ 或实数 $r = z.Z$（$z \in \mathbb{Z}$）是 **左递归可枚举的**（left c.e.），当且仅当 $L(Z)$ 是 c.e. 的，（当考虑实数时）即小于 r 的二进有理数是递归可枚举的。

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

事实

- 下列命题等价
  - Z 是左递归可枚举的
  - 存在可计算的序列 $\sigma_0 <_{lex} \sigma_1 <_{lex} \cdots$ 使得 $\lim_n \sigma_n = Z$,
    即：对任意 $m \in \mathbb{N}$ 存在 σ_n，使得 $\sigma_n \upharpoonright m = Z \upharpoonright m$
- 如果 Z（作为特征函数对应的集合）是 c.e. 的，那么 Z 是左 c.e. 的

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

并非所有左 c.e. 的序列是 c.e. 的

例

令

$$A_0 = 010101\cdots。$$

逐一运行所有 $\Phi_{e,s}(2e+1)$，不妨设对任意第 s 步，只有至多一个满足 $e \leq s$ 的 $\Phi_e(2e+1)$ 得到运行。假设 A_s 已定义。定义 A_{s+1} 如下：如果发现某个 $\Phi_{e,s}(2e+1)$ 首次停机，则令 $A_{s+1}(2e) = 1$，$A_{s+1}(2e+1) = 0$，其余与 A_s 相同。令 $A = \lim_s A_s$

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

事实

- 如果 Z 是左 c.e. 的，那么 $Z \leq_T 0'$
- $\Omega \equiv_T 0'$

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

事实

Ω 是 1-随机的，即存在常量 $c \in \mathbb{N}$ 使得，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$K(\Omega \restriction n) \geq n - c$$

习题

- 定义 $\hat{\Omega} = \sum_{\sigma \in 2^{<\omega}} 2^{-K(\sigma)}$。 证明: $\hat{\Omega}$ 是左 c.e. 的，并且是 1-随机的。

下期预告

- 基于统计学测试的刻画：马丁-洛夫随机性