

# 可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

# 前情回顾

- 可计算支配的与超免疫的
  - 集合  $X$  不是可计算支配的, 当且仅当  $X$  是超免疫度的
  - 集合  $X$  是可计算支配的, 则  $f \leq_T X \Rightarrow f \leq_{tt} X$
  - $A \leq_T 0'$  且不可计算, 则  $A$  是超免疫度的

# 前情回顾

- 集合  $A$  是  $\text{high}_n$  的, 当且仅当  $0^{(n+1)} \leq_T A^{(n)}$
- $\Delta_2^0$  集合  $A$  是  $\text{high}_n$  的, 当且仅当  $A^{(n)} \equiv_T 0^{(n+1)}$
- 集合  $A$  是高效的, 当且仅当存在  $f \leq_T A$  支配所有可计算函数

# Post 问题

## Post 问题

是否存在 c.e. 集合  $A$  有  $0 <_T A <_T 0'$

# 0 和 0' 之间的集合

## 记法

对集合  $A, B$ , 我们用  $A|_T B$  表示  $A \not\leq_T B$  且  $B \not\leq_T A$

## 定理 (Post and Kleene)

存在集合  $A, B \leq_T 0'$  有  $A|_T B$ , 因而  $0 <_T A, B <_T 0'$

## 证明.

有穷扩张、对角线

# 单集

## 定义

- 一个 c.e. 的集合  $A$  是 **单集** (simple set), 当且仅当  $\mathbb{N} \setminus A$  无穷且对每个无穷 c.e. 集合  $W$ ,  $A \cap W \neq \emptyset$

## 事实

- 如果  $A$  是单集, 那么  $\mathbb{N} \setminus A$  不是 c.e. 的, 因而  $A$  不是可计算的
- 如果  $A$  是低效的单集, 那么  $0 <_T A <_T 0'$

# 单集

## 事实

存在一个单集

- 证明 1: 枚举每个  $W_e$  中第一个  $\geq 2e$  的元素
- 证明 2: 浮标法, 每个浮标  $\Gamma_e$  至多被移动有穷次

# 单集

事实

存在一个低效的单集  $A$ , 因而  $0 <_T A <_T 0'$

证明.

(有穷损害优先方法)

# 习题

## ■ 1.5.21

# 下期预告

- Friedberg-Muchnik 定理
- Sacks Splitting Theorem
- 康托尔空间