可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 低效的：$A' \equiv_T 0'$，low_n 的
- 超低效的：$A' \equiv_{tt} 0'$
- 广义低效的：$A' \equiv_T A \oplus 0'$，GL_n 的

前情回顾

- 支配（全函数、部分函数）
- A 是 GL_1 的，当且仅当每个 A 中部分可计算的函数 Φ_e^A 都被某个 $f \leq_T A \oplus 0'$ 支配

支配

定义 (可计算支配)

我们称集合 A 是 可计算支配的 （computably dominated），当且仅当每个函数 $g \leq_T A$ 都被一个可计算函数支配

支配

定义 (超免疫)

- 任给无穷集合 A，定义 p_A 是 A 从小到大的枚举函数。即对任意 n，$p_A(n) < p_A(n+1)$ 且 $\operatorname{ran} p_A = A$
- 我们称集合 E 是 超免疫的 （hyperimmune），当且仅当 E 是无穷的，且 p_E 不被任何可计算函数支配

支配

事实

集合 A 不是可计算支配的，当且仅当存在超免疫的集合 $E \equiv_T A$

证明.

$(\Leftarrow)$ $p_E \leq_T E \leq_T A$

$(\Rightarrow)$ 假设 $f \leq_T A$ 不被任何可计算函数支配。定义 $h(0) = 0$，$h(2n+1) = h(2n) + f(n) + 1$，$h(2n+2) = h(2n+1) + A(n) + 1$。令 $E = ranh$。

定义

- 我们称集合 A 是 超免疫度的 （of hyperimmune degree），当且仅当它不是可计算支配的
- 我们又称可计算支配的集合 A 是 无超免疫度的 （of hyperimmune-free degree）

支配

事实

集合 A 是可计算支配的，当且仅当对任意函数 f

$$f \leq_T A \Rightarrow f \leq_{tt} A$$

证明.

($\Rightarrow$) 假设 $f = \Phi_e^A$。令 $g(x) = \mu s \Phi_{e,s}^A(x) \downarrow$。则 $g \leq_T A$。取可计算的函数 t 支配 g，t 支配了 Φ_e^A 的运行时间

支配

事实

集合 A 是可计算支配的，当且仅当对任意函数 f

$$f \leq_T A \Rightarrow f \leq_{tt} A$$

证明.

($\Leftarrow$) 假设 $f \leq_{tt} A$。取 $f'(x)$ 是 “‘真值表’ 所有可能值的最大元”

支配

事实

如果 A 是 Δ^0_2 的且不可计算，那么 A 不是可计算支配的

证明.

反设 A 是可计算支配的。令 $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 A 的可计算逼近。考虑 $g(s) = \mu t \geq s\ A_t{\upharpoonright}s = A{\upharpoonright}s$。$g \leq_T A$，因而被某个可计算的 f 支配。从而 A 是可计算的：找 $s > n$，使得对任意 $s \leq t \leq f(s)$ 有 $A_s{\upharpoonright}n+1 = A_t{\upharpoonright}n+1$。

高效性

定义

我们称集合 A 是 high$_n$ 的，当且仅当 $0^{(n+1)} \leq_T A^{(n)}$

注意:

- Δ^0_2 集合 A 是 high$_n$ 的，当且仅当 $A^{(n)} \equiv_T 0^{(n+1)}$
- 可计算 $\subset$ low$_1$ $\subset$ low$_2$ $\subset \cdots \subset$ 非 high$_2$ $\subset$ 非 high$_1$ $\subset$ $\{A \mid A \not\geq_T 0'\}$

高效性

事实

$0'$ 是高效的（high_1 的），且存在 $f \leq_T 0'$ 支配所有的可计算函数

事实

集合 A 是高效的，当且仅当存在 $f \leq_T A$ 支配所有可计算函数

习题

- 1.5.13, 1.5.14, 1.5.17*

下期预告

- 单集（simple set）
- Post 问题与有穷损害优先方法