可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 年春季

前情回顾

- 使用函数 use $\Phi_e^Z(x)$，$\Phi_e^\sigma(x) = y$、$\Phi_{e,s}^\sigma(x) = y$
- 真值表归约与弱真值表归约
- 联
- 自然数集合的算术层谱

$$A \in \Sigma_{n+1}^0 \iff A \text{ 是 } 0^{(n)} \text{ 中 c.e. 的}$$

Sheonfield 极限引理

引理 (Sheonfield 极限引理)

下列命题等价

(1) A 是 Δ^0_2 的

(2) $A \leq_T 0'$

(3) 存在可计算的强编码序列 $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 使得，每个 $A_s \subset s$，并且对每个 x，$\lim_s A_s(x) \downarrow= A(x)$

此时，我们称 $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 是 A 的一个可计算逼近

前情回顾

- ω-c.e. 和 n-c.e.
- A 是 ω-c.e. $\Leftrightarrow A \leq_{wtt} 0' \Leftrightarrow A \leq_{tt} 0'$
- $A \leq_{wtt} B \Rightarrow A \leq_{tt} B$ 并非一般地成立

低效性

定义

- 我们称集合 A 是 **低效的** （low），当且仅当 $A' \leq_T 0'$
- 我们称集合 A 是 **低效$_n$ 的** （low$_n$），当且仅当 $A^{(n)} \leq_T 0^{(n)}$
- 我们称集合 A 是 **高效的** （high），当且仅当 $0'' \leq_T A'$

直观上，A 是低效的，即 A 作为信息源的计算都可以用 $0'$ 来替代

低效性

事实

- 如果 A 是低效的，那么 $A \leq_T 0'$ 且 $A' \equiv_T 0'$
- 如果 A 是 低效$_n$ 的，那么 $A^{(n)} \equiv_T 0^{(n)}$
- 可计算 $\subset$ 低效$_1$ $\subset$ 低效$_2$ $\subset \cdots \subset \{A \mid A \not\geq_T 0'\}$

低效性

定义

集合 A 是 **超低效的** （superlow），当且仅当 $A' \leq_{tt} 0'$，

事实

- A 是超低效的，当且仅当 $A' \equiv_{tt} 0'$，也即 A' 是 ω-c.e. 的
- 如果 A 是超低效的，那么 A 是低效的
- 如果 A 是（超）低效的，$B \leq_T A$，那么 B 也是（超）低效的

低效性

注意: 低效的集合 A 必须是 Δ^0_2

定义

- A 是 广义低效$_1$ 的 (generalized low$_1$)，记作 GL_1，当且仅当 $A' \equiv_T A \oplus 0'$
- A 是 广义低效$_2$ 的，记作 GL_2，当且仅当 $A'' \equiv_T (A \oplus 0')'$

支配

定义

- 任给函数 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们称 f 支配 （dominates） g，当且仅当存在 m，对任意 $n \geq m$ 有 $f(n) \geq g(n)$
- 考虑 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和部分函数 ψ，我们称 f 支配 （dominates） ψ，当且仅当存在 m，对任意 $n \geq m$ 有 $\psi(n) \downarrow \to f(n) \geq \psi(n)$

支配

事实

A 是 GL_1 的，当且仅当每个 A 中部分可计算的函数 Φ_e^A 都被某个 $f \leq_T A \oplus 0'$ 支配

习题

1.5.5, 1.5.7, 1.5.8

下期预告

- 可计算支配、高效
- Post 问题