逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

前情提要

- 我们定义了 $\Sigma \models \varphi$
- 我们定义了 $\Sigma \vdash \varphi$
  - 公理
  - 演绎规则
- 可靠性：如果 $\Sigma \vdash \varphi$，那么 $\Sigma \models \varphi$

形式证明

公理集:

1. 所有命题逻辑重言式都是公理
2. $\forall x\varphi \to \varphi_t^x$　　条件: t 若是变元 y, y 替换 x 在 φ_y^x 中的出现不能被 φ 中已有的 $\forall y$、$\exists y$ 约束
3. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
4. $\varphi \to \forall x\varphi$　　条件: x 不在 φ 中自由出现

形式证明

演绎规则：

1. 分离规则：如果一个证明序列中已经有公式 φ 和 $\varphi \to \psi$，那么在后面加上 ψ 还是证明序列
2. 全称概括规则 (Universal Generalization)：如果存在从 Σ 到 φ 的证明序列，并且 x 不在 Σ 的任何公式中自由出现，那么在后面加上 $\forall x \varphi$ 还是证明序列

形式证明

如果语言中有 等词，我们还可以补充两条 等词公理：

- $x = x$
- $x = y \to \varphi \to \varphi'$　　条件：φ 是不含量词的公式，φ' 是把 φ 中任意个 x 的出现替换为 y 得到的公式

例

我们证明：$\vdash \varphi_t^x \to \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi_t^x) \to (\varphi_t^x \to \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \to \neg \forall x \neg \varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明：$\vdash \varphi_t^x \to \exists x\varphi$

- $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi_t^x) \to (\varphi_t^x \to \neg\forall x\neg\varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \to \neg\forall x\neg\varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明：$\vdash \varphi^x_t \to \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi^x_t$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi^x_t) \to (\varphi^x_t \to \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi^x_t \to \neg \forall x \neg \varphi$ (分离规则)

形式证明

例

我们证明：$\vdash \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$

- $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x$ (公理 2)
- $(\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ (公理 1)
- $\varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$ (定义)

形式证明

例

假设 x 不再 φ 中出现，那么 $\varphi \to \forall x\psi \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$

- $\varphi \to \forall x\psi$ (前提)
- $\forall x\psi \to \psi$ (公理 2)
- $(\varphi \to \forall x\psi) \to (\forall x\psi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ (公理 1)
- $\varphi \to \psi$ (2 次分离规则)
- $\forall x(\varphi \to \psi)$ (全称概况规则)

形式证明

定理 (形式证明的演绎定理)

$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$，当且仅当 $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$

证明.

($\Leftarrow$) 假设 $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$。也有 $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$。在见证它的证明序列后接上 φ, ψ 即可。

($\Rightarrow$) 假设 $\langle \beta_0, \ldots, \beta_n \rangle$ 见证 $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$。我们证明对每个 $0 \leq i \leq n$ 都有 $\Sigma \vdash \varphi \to \beta_i$。

形式证明

继续证明.

- 如果 β_i 是公理或 Σ 中公式
- 如果 β_i 是由前面的 β_j 和 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$（$j, k < i$）得到的
- 如果 $\beta_i = \forall x \beta_j$ 是（$j < i$）且 x 不在 Σ 中自由出现

形式证明

我们证明几个关于等词的 内定理

- $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
- $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2 \to Px_1y_1 \to Px_2y_2)$

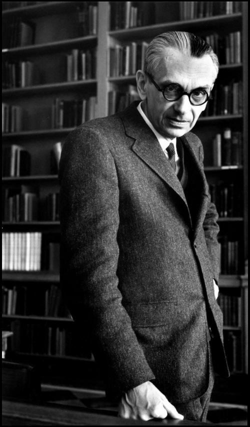
哥德尔完备性定理

定理 (哥德尔完备性定理)

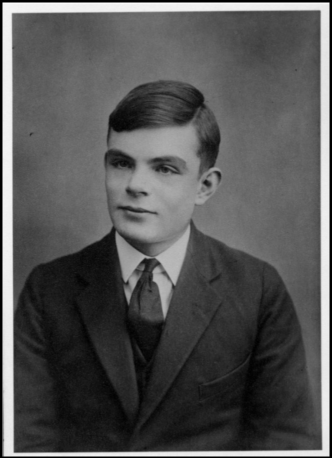
$\Sigma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash \varphi$

配合可靠性定理，我们知道一阶逻辑有一个完备的且可靠的公理系统

哥德尔（1906-1978）



图灵（1912-1954）



图灵可计算

万物皆可（用自然数）编码

例

- 图片（.bmp）
- 声音（.wav）
- 文章、程序……
- 虚幻引擎、3D 打印……

图灵可计算

什么是编码?

- 编码（encoding）是一个以自然数为值域的函数，解码（decoding）是以自然数为定义域的函数。
- 编码和解码应该是能行的（effective）
- 成功的编码不仅仅是数学问题

定义 (算术问题)

一类算术问题就是关于自然数结构 $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$ 的一类问题，对应于一个自然数上的函数：$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$。

例

"x 是不是偶数?" 对应于函数

$$f(x) = 1 - (x \mod 2) = \begin{cases} 1, & \text{若存在 } y \leq x \text{ 使得 } x = 2y \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

图灵可计算

- 所有算术问题都是可计算的吗?
- 证明一类算术问题是可计算的：给出机械的计算过程
- 如何证明一类算术问题不是可计算的?
  - 必须穷尽所有机械的计算过程
  - 必须有对"机械的计算过程"的严格定义

图灵可计算

- 所有可定义的算术问题都是可计算的吗?
- 证明一类算术问题是可计算的：给出机械的计算过程
- 如何证明一类算术问题不是可计算的?
    - 必须穷尽所有机械的计算过程
    - 必须有对 “ 机械的计算过程 ” 的严格定义

图灵可计算

- 所有可定义的算术问题都是可计算的吗？
- 证明一类算术问题是可计算的：给出机械的计算过程
- 如何证明一类算术问题不是可计算的？
  - 必须穷尽所有机械的计算过程
  - 必须有对“机械的计算过程”的严格定义

图灵可计算

- 所有可定义的算术问题都是可计算的吗?
- 证明一类算术问题是可计算的：给出机械的计算过程
- 如何证明一类算术问题不是可计算的?
  - 必须穷尽所有机械的计算过程
  - 必须有对“机械的计算过程”的严格定义

图灵可计算

机械过程的直观

- 一个机械的过程必须仅依赖一组有穷的指令集
- 机械地可计算要求在有穷步内得到期望的结果
- 机械过程仅按照指令集运行，不依赖任何洞见或灵机一动
- 机械过程必须是原则上人能完成的

这些直观尚不足以构成对机械过程的精确定义

图灵可计算

机械过程的直观

- 一个机械的过程必须仅依赖一组有穷的指令集
- 机械地可计算要求在有穷步内得到期望的结果
- 机械过程仅按照指令集运行，不依赖任何洞见或灵机一动
- 机械过程必须是原则上人能完成的

这些直观尚不足以构成对机械过程的精确定义

图灵可计算

历史上关于机械过程的等价定义

- 哥德尔的递归函数
- 丘奇的 λ-演算
- 图灵机

丘奇-图灵论题（Church Turing Thesis）

一个自然数上的函数是机械地可计算的当且仅当它是递归的 / λ-可演算的 / 图灵机可计算的

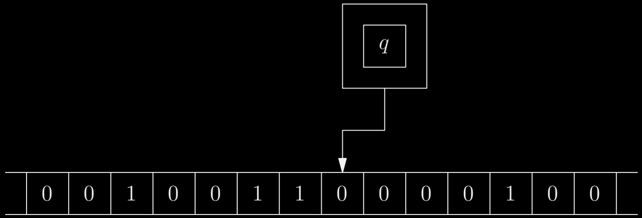
图灵可计算

我们之前就已经有了关于机械过程的精确概念，但直到了解了图灵的工作之后，我们才清晰地感知到（perceive）它。

Kurt Gödel

图灵可计算

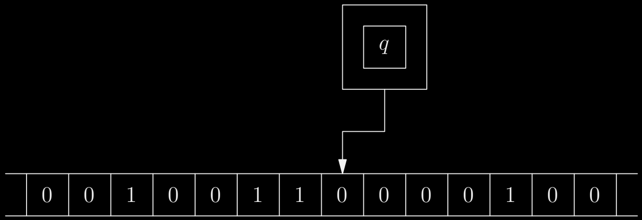
图灵机



有穷指令集、有穷内部状态、有穷字母表、无穷纸带

图灵可计算

图灵机



指令形如：p0Lq，p10q

图灵可计算

一个概念分析的范例：

图灵机可计算正确地刻画了机械地可计算这个概念

(Turing, 1937) 第九节

图灵可计算

【本文】到此为止尚未试图证明“可计算的”数囊括了所有会被自然地认为是可计算的数。对此，所有可以被给出的论证都注定是从根本上诉诸直观的，也因此是在数学上不令人满意的。

(Turing, 1937) 第九节

图灵可计算

图灵区分的三种“从根本上诉诸直观”的论证

- 直接诉诸直观的论证
- 证明两种不同定义等价
- 给出一大类“被自然地认为是可计算的数”，并证明它们是可计算的

图灵可计算

图灵的论证策略:

$$\begin{aligned} \text{机械地可计算的} &\Rightarrow \text{原则上人能完成的} \\ &\Rightarrow \text{图灵机可计算的} \\ &\Rightarrow \text{机械地可计算的} \end{aligned}$$

图灵可计算

图灵的论证策略:

机械地可计算的 $\Rightarrow$ 原则上人能完成的

$\Rightarrow$ 图灵机可计算的

$\Rightarrow$ 机械地可计算的

图灵可计算

图灵的论证策略：

$$
\begin{aligned}
\text{机械地可计算的} &\Rightarrow \text{原则上人能完成的}\\
&\Rightarrow \text{图灵机可计算的}\\
&\Rightarrow \text{机械地可计算的}
\end{aligned}
$$

图灵可计算

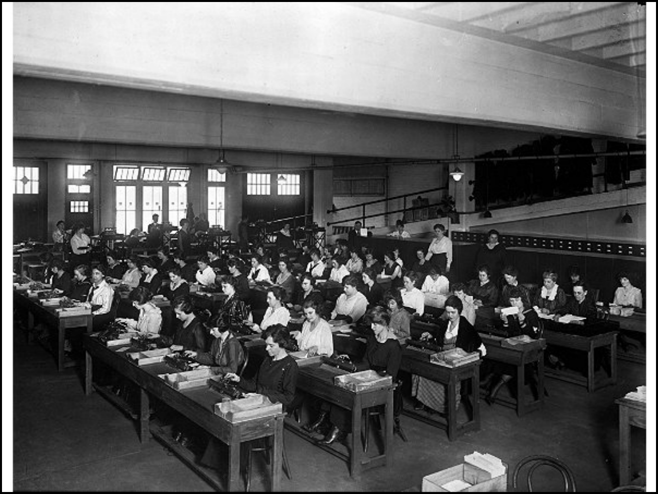
图灵的论证策略：

机械地可计算的 $\Rightarrow$ 原则上人能完成的

$\Rightarrow$ 图灵机可计算的

$\Rightarrow$ 机械地可计算的

Human Computer



图灵可计算

理想的计算者

【将理想的计算者的】操作分解为基本的‘简单操作’以至于很难想象再怎么继续划分了

(Turing, 1937) 第九节

图灵可计算

理想的计算者

- 不限量的草稿纸
- 一套符号（字母表）

图灵可计算

可以将“不限量的草稿纸”替换为二维双向无穷纸带

$$\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{t^2 + \Delta x^2 + 2t\Delta x - t^2 - \Delta x^2 + 2t\Delta x}{2\Delta x}$$

$$= \frac{4t\Delta x}{2\Delta x}$$

$$\frac{\delta s}{\delta t} = 2t$$

图灵可计算

以下是数学定理

- 拥有 n 条双向无穷纸带的图灵机等价于拥有 1 条双向无穷纸带的图灵机
- 拥有无穷条双向无穷纸带的图灵机等价于拥有 1 条双向无穷纸带的图灵机
- 拥有 1 条单向无穷纸带的图灵机等价于拥有 1 条双向无穷纸带的图灵机

图灵可计算

可以假设字母表有穷

自然主义者可能的论证:

- 诉诸神经科学
- 诉诸物理学（普朗克长度）

图灵可计算

图灵的论证：

图: 符号的对称差

图灵可计算

图灵的论证：

图: 符号的对称差

图灵可计算

图灵的论证:

图: 符号的对称差

图灵可计算

图灵的论证：

- 一个符号是 $[0,1]*[0,1]$ 的一个勒贝格可测的子集
- 符号间的距离被定义为两个符号对称差的测度
- 由此，上述符号组成一个紧致的度量空间
- 因此不存在两两不交的无穷领域集

推论：无论理想计算者的识别精度有多高都只能识别有穷个符号

图灵可计算

图灵的论证:

- 一个符号是 $[0,1]*[0,1]$ 的一个勒贝格可测的子集
- 符号间的距离被定义为两个符号对称差的测度
- 由此，上述符号组成一个紧致的度量空间
- 因此不存在两两不交的无穷领域集

推论: 无论理想计算者的识别精度有多高都只能识别有穷个符号

图灵可计算

以下也是数学定理

- 识别 n 个符号的图灵机与识别 2 个符号的图灵机是等价的
  - 我们总是可以用一个符号序列来编码一个符号
- 限制图灵机一次可以注意 n 格与限制一次只能注意一格是等价的

图灵可计算

可以假设心灵状态有穷

自然主义者可能的论证：

- 诉诸脑科学

图灵可计算

计算者总是可以暂停她的工作然后继续这项工作。如果她暂停了她的工作，她必须留下一条指示笔记 (note of instructions)，以某个标准形式书写，说明这项工作如何继续下去。这条笔记就是“心灵状态”的对应。我们假设这个计算者工作得如此断断续续以至于她每次坐下只能工作至多一步。指示笔记必须让她可以进行一步并且写出下一条笔记。

(Turing, 1937) 第九节

图灵可计算

图灵断言：

- 计算者每一步操作完全取决于其当时的心灵状态（或指示笔记）以及观察到的纸带上的符号
- 计算者能做的操作：
  - 改变纸带上的一个符号
  - 改变关注的方格

  并改变心灵状态

注意：可以假设只能移至某个有穷距离内的方格

图灵可计算

图灵断言：

- 计算者每一步操作完全取决于其当时的心灵状态（或指示笔记）以及观察到的纸带上的符号
- 计算者能做的操作：
  - 改变纸带上的一个符号
  - 改变关注的方格

  并改变心灵状态

注意：可以假设只能移至某个有穷距离内的方格

图灵可计算

图灵断言：

- 计算者每一步操作完全取决于其当时的心灵状态（或指示笔记）以及观察到的纸带上的符号
- 计算者能做的操作：
  - 改变纸带上的一个符号
  - 改变关注的方格

  并改变心灵状态

注意：可以假设只能移至前后挨着的方格

图灵可计算

原则上人能完成的 $\Rightarrow$ 图灵机可计算的

图灵可计算

图灵机可计算的 $\Leftrightarrow$ 机械地可计算的

练习与讨论 12.1

- 假设 x 不在 φ 中自由出现。证明：
  $\vdash (\varphi \to \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$
- 证明：$\forall x \forall y \forall z(x = y \to y = z \to x = z)$