逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

前情提要

谓词逻辑的语法

- 基本符号：变元、常元、词项、谓词、量词、命题连接池和括号
- 合式公式：原子公式、合式公式的递归定义
- 量词的辖域、变元的约束出现和自由出现、语句
- 代入与变元易字

来时的路

- 我们生活、学习、工作中确实遇到一类现象，它们似乎不是物理的，甚至是超物理的，它们不只是社会的，至少是跨社会的。一旦我们开始思考、交流、计算，它就一定出现。
- 我们希望刻画这种现象，总结一些规律，从而再次遇到这种现象时，我们能更好地驾驭它。

来时的路

- 我们生活、学习、工作中确实遇到一类现象，它们似乎不是物理的，甚至是超物理的，它们不只是社会的，至少是跨社会的。一旦我们开始思考、交流、计算，它就一定出现。
- 我们希望刻画这种现象。总结一些规律。从而再次遇到这种现象时，我们能更好地驾驭它。

来时的路

- 这些被称作逻辑的现象往往以 推理 的形态出现。
- 我们关于什么推理是 有效的 往往有共同的直观，这暗示着背后确有某种规律。
- 或是由于我们自身的失误，或是由于自然语言的遮蔽，我们会犯错。因此，我们需要总结一套清晰、明确易于套用的规律

来时的路

- 这些被称作逻辑的现象往往以 推理 的形态出现。
- 我们关于什么推理是 有效的 往往有共同的直观，这暗示着背后确有某种规律。
- 或是由于我们自身的失误，或是由于自然语言的遮蔽，我们会犯错。因此，我们需要总结一套清晰、明确易于套用的规律

来时的路

- 这些被称作逻辑的现象往往以 推理 的形态出现。
- 我们关于什么推理是 有效的 往往有共同的直观，这暗示着背后确有某种规律。
- 或是由于我们自身的失误，或是由于自然语言的遮蔽，我们会犯错。因此，我们需要总结一套清晰、明确易于套用的规律

来时的路

- 这套规律是关于如何判断推理的有效性的。所谓有效的推理，即在任何情况下，如果前提为真，那么结论为真。而与有效性相关的只是推理的 形式 。
- 无论是为了拨开自然语言的遮蔽还是突出推理的形式，都在召唤一种人工语言（或形式语言）
- 我们上节课介绍了这样一种语言的语法

来时的路

- 这套规律是关于如何判断推理的有效性的。所谓有效的推理，即在任何情况下，如果前提为真，那么结论为真。而与有效性相关的只是推理的 形式 。
- 无论是为了拨开自然语言的遮蔽还是突出推理的形式，都在召唤一种人工语言（或形式语言）
- 我们上节课介绍了这样一种语言的语法

来时的路

- 这套规律是关于如何判断推理的有效性的。所谓有效的推理，即在任何情况下，如果前提为真，那么结论为真。而与有效性相关的只是推理的 形式 。
- 无论是为了拨开自然语言的遮蔽还是突出推理的形式，都在召唤一种人工语言（或形式语言）
- 我们上节课介绍了这样一种语言的语法

谓词逻辑的语义

我们已经有了一个完整的语言的躯壳，我们甚至可以用它来书写推理了

例

$$\frac{\forall x(Sx \to Mx) \qquad \forall x(Mx \to Px)}{Sc \to Pc}$$

谓词逻辑的语义

我们已经有了一个完整的语言的躯壳，我们甚至可以用它来书写推理了

例

$$\frac{\exists x \forall y Rxy}{\forall y \exists x Rxy}$$

我们仍然需要一套标准来判断一个推理是否有效

谓词逻辑的语义

我们已经有了一个完整的语言的躯壳，我们甚至可以用它来书写推理了

例

$$\frac{\exists x \forall y Rxy}{\forall y \exists x Rxy}$$

我们仍然需要一套标准来判断一个推理是否有效

谓词逻辑的语义

- 一般地，我们如何判断一个推理的有效性？
- 类似命题逻辑，我们需要定义什么是谓词逻辑语言能够谈论的“情况”
- 我们需要赋予谓词逻辑语言以 语义 （semantics）
- 一个隐藏任务：我们希望让大家相信，谓词逻辑是“通用文字”

谓词逻辑的语义

- 一般地，我们如何判断一个推理的有效性?
- 类似命题逻辑，我们需要定义什么是谓词逻辑语言能够谈论的“情况”
- 我们需要赋予谓词逻辑语言以 语义 （semantics）
- 一个隐藏任务：我们希望让大家相信，谓词逻辑是“通用文字”

谓词逻辑的语义

- 一般地，我们如何判断一个推理的有效性？
- 类似命题逻辑，我们需要定义什么是谓词逻辑语言能够谈论的“情况”
- 我们需要赋予谓词逻辑语言以 语义 （semantics）
- 一个隐藏任务：我们希望让大家相信，谓词逻辑是“通用文字”

谓词逻辑的语义

- 一般地，我们如何判断一个推理的有效性？
- 类似命题逻辑，我们需要定义什么是谓词逻辑语言能够谈论的“情况”
- 我们需要赋予谓词逻辑语言以 语义 （semantics）
- 一个隐藏任务：我们希望让大家相信，谓词逻辑是“通用文字”

谓词逻辑的语义

- 基于对常元和谓词的选择，我们可以有不同的 具体的谓词逻辑语言 或 谓词逻辑语言的片段

例

- 一个三段论，可以用只含有 3 个 1 元谓词 的谓词逻辑书写
- 图的语言只含有 1 个2 元谓词

- 实际使用中，我们总是工作于某个具体的谓词逻辑语言中

谓词逻辑的语义

给定一个具体的谓词逻辑语言，它的 **语义** 就是对其中符号的一套解释。我们把这套解释称作 **结构** （structure）或 **模型** （model）

例

考虑含有一个 1 元谓词符号 P 和一个 2 元谓词符号 R 的语言。它的一个结构或模型要提供必要的信息让我们知道诸如 $\forall x(\exists yRyx \to Px)$ 这样的语句在说什么。

谓词逻辑的语义

给定一个具体的谓词逻辑语言，它的 **语义** 就是对其中符号的一套解释。我们把这套解释称作 **结构** （structure）或 **模型** （model）

例

考虑含有一个 1 元谓词符号 P 和一个 2 元谓词符号 R 的语言。它的一个结构或模型要提供必要的信息让我们知道诸如 $\forall x(\exists yRyx \to Px)$ 这样的语句在说什么。

谓词逻辑的语义

例

$\forall x(\exists yRyx \to Px)$ 可以在说“所有被爱的人都是幸福的”，也可以表示“平方数都是非负的”。

为了明确它的意思，我们首先需要解释量词 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的解释—— 论域 （domain）。论域是一个集合，记作 D。此时，P 应该被解释为 D 的一个子集，而 R 被解释为 D 上的一个（二元）关系

谓词逻辑的语义

例

$\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 可以在说“所有被爱的人都是幸福的”，也可以表示“平方数都是非负的”。

为了明确它的意思，我们首先需要解释量词 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的解释—— 论域 (domain)。论域是一个集合，记作 D。此时，P 应该被解释为 D 的一个子集，而 R 被解释为 D 上的一个（二元）关系

谓词逻辑的语义

例

$\forall x(\exists yRyx \rightarrow Px)$ 可以在说“所有被爱的人都是幸福的”，也可以表示“平方数都是非负的”。

为了明确它的意思，我们首先需要解释量词 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的解释—— 论域 （domain）。论域是一个集合，记作 D。此时，P 应该被解释为 D 的一个子集，而 R 被解释为 D 上的一个（二元）关系

谓词逻辑的语义

定义 (模型或结构)

给定具体的谓词逻辑语言 $\mathcal{L}$，我们定义 $\mathcal{L}$ 的一个 模型 或 结构 $\mathcal{M} = (D, I)$ 为一个二元组。其中 D 是一个非空集合，即 $\mathcal{M}$ 的论域。I 是一个解释函数，对 $\mathcal{L}$ 中的每个 n 元谓词 P，$I(P)$ 是 D 上的一个 n 元关系；对 $\mathcal{L}$ 中的每个常元 c，$I(c)$ 是 D 中的一个元素。

谓词逻辑的语义

约定

给定（具体的谓词逻辑）语言 $\mathcal{L}$，令 $\mathcal{M} = (D, I)$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个模型。对 $\mathcal{L}$ 中的谓词 P，我们可能会用 P^I 或 $P^{\mathcal{M}}$ 来表示 $I(P)$。类似地，对常元 c，我们用 c^I 或 $c^{\mathcal{M}}$ 来表示 $I(c)$。

谓词逻辑的语义

- 给定含有谓词 P, R 的语言 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，我们现在知道语句 $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是什么意思了。
- 根据命题逻辑的经验，一个公式的涵义可以从它的诸子公式的涵义得到。但 $\exists y Ryx \to Px$ 的意思是什么？

谓词逻辑的语义

- 给定含有谓词 P, R 的语言 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，我们现在知道语句 $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是什么意思了。
- 根据命题逻辑的经验，一个公式的涵义可以从它的诸子公式的涵义得到。但 $\exists y Ryx \to Px$ 的意思是什么？

谓词逻辑的语义

- 给定含有谓词 P, R 的语言 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，我们现在知道语句 $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是什么意思了。
- 根据命题逻辑的经验，一个公式的涵义可以从它的诸子公式的涵义得到。但 $\exists y Ryx \to Px$ 的意思是什么？

定义 (变元赋值)

假设 $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \ldots\}$ 是谓词逻辑语言的变元集，$\mathcal{M} = (D, I)$ 是该语言的一个模型。一个 $\mathcal{M}$ 上的 变元赋值 （variable assignment）是一个把 $\mathcal{V}$ 中变元映射为 D 中元素的函数 $s : \mathcal{V} \to D$

谓词逻辑的语义

例

给定含有谓词 P, R 的语言。考虑模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，其中 $D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$，$P^I = \{$ 张三、李四 $\}$，$R^I = \{$(李四, 王五), (王五, 李四)$\}$。令变元赋值 s 满足 $s(v_0) =$ 张三，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。此时，

- $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 成立吗?
- 令 $x = v_0$，$\exists y Ryx \to Px$ 呢?

谓词逻辑的语义

例

给定含有谓词 P, R 的语言。考虑模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，其中 $D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$，$P^I = \{$ 张三、李四 $\}$，$R^I = \{($李四, 王五$)$, $($王五, 李四$)\}$。令变元赋值 s 满足 $s(v_0) =$ 张三，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。此时，

- $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 成立吗？
- 令 $x = v_0$，$\exists y Ryx \to Px$ 呢？

谓词逻辑的语义

例

给定含有谓词 P, R 的语言。考虑模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，其中 $D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$，$P^I = \{$ 张三、李四 $\}$，$R^I = \{$(李四, 王五), (王五, 李四)$\}$。令变元赋值 s 满足 $s(v_0) =$ 王五，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。此时，

- $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 成立吗？
- 令 $x = v_0$，$\exists y Ryx \to Px$ 呢？

谓词逻辑的语义

为了更好地解释诸如 $\forall x(\exists yRyx \to Px)$ 和 $\exists yRyx \to Px$ 在语义上的递归关系，我们需要定义对变元赋值的 局部改动

定义 (变元赋值的局部改动)

给定语言和该语言的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$ 以及一个变元赋值 s。假设 $x \in \mathcal{V}$ 是一个变元且 $d \in D$，我们用 $s[x := d]$ 表示一个变元赋值函数，对任意赋值 $y \in \mathcal{V}$

$$s[x := d](y) = \begin{cases} d & \text{若 } y = x, \\ s(y) & \text{若 } y \neq x \end{cases}$$

谓词逻辑的语义

例

回到之前的例子。假设 $s(v_0) =$ 张三，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。那么 $s[v_0 := \text{王五}](v_0) =$ 王五，$s[v_0 := \text{王五}](v_1) =$ 李四，$s[v_0 := \text{王五}](v_2) =$ 王五

谓词逻辑的语义

给定语言 $\mathcal{L}$，给定 $\mathcal{L}$ 的一个模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，给定一个变元赋值 $s : \mathcal{V} \to D$，我们要定义 满足 （satisfaction）关系

$$\mathcal{M} \vDash_s \varphi$$

读作 “(公式) φ 在（模型）$\mathcal{M}$ 中被（赋值） s 满足”

谓词逻辑的语义

首先，为了书写方便，我们统一对词项（变元或常元）的语义解释的记法。

记法

给定语言 $\mathcal{L}$，给定 $\mathcal{L}$ 的一个模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，给定一个变元赋值 $s : \mathcal{V} \to D$，令 t 是词项，定义

$$[t]_s^I = \begin{cases} c^I & \text{若 } t \text{ 是常元 } c, \\ s(x) & \text{若 } t \text{ 是变元 } x \end{cases}$$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

给定语言 $\mathcal{L}$，给定 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，给定变元赋值 $s : \mathcal{V} \to D$，我们对公式的构造递归地定义 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$

- 对原子公式 $Pt_1 \ldots t_n$，$\mathcal{M} \vDash_s Pt_1 \ldots t_n$，当且仅当 $([t_1]^I_s, \ldots, [t_n]^I_s) \in P^I$，即 D 中元素 $[t_1]^I_s, \ldots, [t_n]^I_s$ 之间有 P^I 关系

  特别地，对等词 $=$（一个特别的 2 元谓词），$\mathcal{M} \vDash_s t_1 = t_2$，当且仅当 $[t_1]^I_s = [t_2]^I_s$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

给定语言 $\mathcal{L}$，给定 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M} = (D, I)$，给定变元赋值 $s : \mathcal{V} \to D$，我们对公式的构造递归地定义 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$

- 对原子公式 $Pt_1 \ldots t_n$，$\mathcal{M} \vDash_s Pt_1 \ldots t_n$，当且仅当 $([t_1]^I_s, \ldots, [t_n]^I_s) \in P^I$，即 D 中元素 $[t_1]^I_s, \ldots, [t_n]^I_s$ 之间有 P^I 关系

  特别地，对等词 $=$（一个特别的 2 元谓词），

  $\mathcal{M} \vDash_s t_1 = t_2$，当且仅当 $[t_1]^I_s = [t_2]^I_s$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

- 对公式的布尔组合：
  - $\mathcal{M} \vDash_s \neg\varphi$，当且仅当 并非 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \nvDash_s \varphi$
  - $\mathcal{M} \vDash_s \varphi \wedge \psi$，当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 且 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$
  - $\mathcal{M} \vDash_s \varphi \vee \psi$，当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 或 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$
  - $\mathcal{M} \vDash_s \varphi \to \psi$，当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 蕴含 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$

谓词逻辑的语义

定义 (塔斯基真定义（Tarski's defnition of truth）)

- 对量词:
  - $\mathcal{M} \models_s \forall x\varphi$，当且仅当对任意 $d \in D$，都有 $\mathcal{M} \models_{s[x:=d]} \varphi$
  - $\mathcal{M} \models_s \exists x\varphi$，当且仅当存在 $d \in D$，使得 $\mathcal{M} \models_{s[x:=d]} \varphi$

谓词逻辑的语义

这是基于公式 φ 的构造的递归定义，它告诉我们如何一步步地确定一个公式是否成立

例

还是回到之前的例子。$D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$，$P^I = \{$ 张三、李四 $\}$，$R^I = \{$(李四, 王五), (王五, 李四)$\}$。$s(v_0) =$ 张三，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。$x = v_0$，$y = v_1$

- $\mathcal{M} \vDash_s Px$? $\mathcal{M} \vDash_{s[x:=\text{李四}]} Px$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx \rightarrow Px$?
- $\mathcal{M} \vDash_s \exists y Ryx \rightarrow Px$? $\mathcal{M} \vDash_s \forall x(\exists y Ryx \rightarrow Px)$?

谓词逻辑的语义

这是基于公式 φ 的构造的递归定义，它告诉我们如何一步步地确定一个公式是否成立

例

还是回到之前的例子。$D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$，$P^I = \{$ 张三、李四 $\}$，$R^I = \{$(李四, 王五), (王五, 李四)$\}$。$s(v_0) =$ 张三，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。$x = v_0$，$y = v_1$

- $\mathcal{M} \vDash_s Px$? $\mathcal{M} \vDash_{s[x:=\text{李四}]} Px$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx \to Px$?
- $\mathcal{M} \vDash_s \exists y Ryx \to Px$? $\mathcal{M} \vDash_s \forall x(\exists y Ryx \to Px)$?

谓词逻辑的语义

这是基于公式 φ 的构造的递归定义，它告诉我们如何一步步地确定一个公式是否成立

例

还是回到之前的例子。D = { 张三、李四、王五 }，P^I = { 张三、李四 }，R^I = {(李四, 王五), (王五, 李四)}。$s(v_0)$ = 张三，$s(v_1)$ = 李四，$s(v_2)$ = 王五。$x = v_0$，$y = v_1$

- $\mathcal{M} \vDash_s Px$? $\mathcal{M} \vDash_{s[x:=\text{李四}]} Px$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx \to Px$?
- $\mathcal{M} \vDash_s \exists y Ryx \to Px$? $\mathcal{M} \vDash_s \forall x(\exists y Ryx \to Px)$?

谓词逻辑的语义

这是基于公式 φ 的构造的递归定义，它告诉我们如何一步步地确定一个公式是否成立

例

还是回到之前的例子。D = { 张三、李四、王五 }，P^I = { 张三、李四 }，R^I = {(李四, 王五), (王五, 李四)}。$s(v_0)$ = 张三，$s(v_1)$ = 李四，$s(v_2)$ = 王五。$x = v_0$，$y = v_1$

- $\mathcal{M} \vDash_s Px$? $\mathcal{M} \vDash_{s[x:=\text{李四}]} Px$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx \rightarrow Px$?
- $\mathcal{M} \vDash_s \exists y Ryx \rightarrow Px$? $\mathcal{M} \vDash_s \forall x(\exists y Ryx \rightarrow Px)$?

谓词逻辑的语义

这是基于公式 φ 的构造的递归定义，它告诉我们如何一步步地确定一个公式是否成立

例

还是回到之前的例子。$D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$，$P^I = \{$ 张三、李四 $\}$，$R^I = \{$(李四, 王五), (王五, 李四)$\}$。$s(v_0) =$ 张三，$s(v_1) =$ 李四，$s(v_2) =$ 王五。$x = v_0$，$y = v_1$

- $\mathcal{M} \vDash_s Px$? $\mathcal{M} \vDash_{s[x:=\text{李四}]} Px$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx \to Px$?
- $\mathcal{M} \vDash_s \exists y Ryx \to Px$? $\mathcal{M} \vDash_s \forall x(\exists y Ryx \to Px)$?

谓词逻辑的语义

这是基于公式 φ 的构造的递归定义，它告诉我们如何一步步地确定一个公式是否成立

例

还是回到之前的例子。D = { 张三、李四、王五 }，P^I = { 张三、李四 }，R^I = {(李四, 王五), (王五, 李四)}。$s(v_0)$ = 张三，$s(v_1)$ = 李四，$s(v_2)$ = 王五。$x = v_0$，$y = v_1$

- $\mathcal{M} \vDash_s Px$? $\mathcal{M} \vDash_{s[x:=\text{李四}]} Px$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx$? $\mathcal{M} \vDash_s Ryx \to Px$?
- $\mathcal{M} \vDash_s \exists y Ryx \to Px$? $\mathcal{M} \vDash_s \forall x(\exists y Ryx \to Px)$?

谓词逻辑的语义

塔斯基真定义中对诸如合取式、析取式、蕴含式是否成立的定义似乎依赖于我们对并且、或、蕴含的直观理解。我们可以理解为定义告诉我们如何基于下述真值表判断组合公式是否可满足

$\mathcal{M} \models_s \varphi$	$\mathcal{M} \models_s \psi$	$\mathcal{M} \models_s \varphi \to \psi$
Yes	Yes	Yes
Yes	No	No
No	Yes	Yes
No	No	Yes

谓词逻辑的语义

塔斯基真定义中对诸如合取式、析取式、蕴含式是否成立的定义似乎依赖于我们对并且、或、蕴含的直观理解。我们可以理解为定义告诉我们如何基于下述真值表判断组合公式是否可满足

$\mathcal{M} \vDash_s \varphi$	$\mathcal{M} \vDash_s \psi$	$\mathcal{M} \vDash_s \varphi \to \psi$
Yes	Yes	Yes
Yes	No	No
No	Yes	Yes
No	No	Yes

谓词逻辑的语义

- 请观察: 根据塔斯基真定义，如果变元赋值 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \models_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models_{s_2} \varphi$
- 虽然一个变元赋值 s 可以涉及对无穷个变元的赋值，实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个变元的赋值
- 上面的条件可以进一步放松为，“如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同”

谓词逻辑的语义

- 请观察：根据塔斯基真定义，如果变元赋值 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \vDash_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_{s_2} \varphi$
- 虽然一个变元赋值 s 可以涉及对无穷个变元的赋值，实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个变元的赋值
- 上面的条件可以进一步放松为，“如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同”

谓词逻辑的语义

- 请观察：根据塔斯基真定义，如果变元赋值 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的变元赋值相同，那么 $\mathcal{M} \vDash_{s_1} \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \vDash_{s_2} \varphi$
- 虽然一个变元赋值 s 可以涉及对无穷个变元的赋值，实际考虑一个或有穷个公式的时候我们只会用到 s 对出现的有穷个变元的赋值
- 上面的条件可以进一步放松为，“如果 s_1, s_2 关于公式 φ 中出现的自由变元赋值相同”

谓词逻辑的语义

因此，如果 φ 是语句，那么或者对所有的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$，或者对所有的变元赋值 $\mathcal{M} \nvDash_s \varphi$

定义

假设 φ 是语句。如果对所有的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$，我们称 φ 在 $\mathcal{M}$ 中 **真**，记作 $\mathcal{M} \vDash \varphi$。

谓词逻辑的语义

继续观察: $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是否成立是如何递归地依赖于其子公式 $\exists y Ryx \to Px$ 是否成立的?

- 为了检验 $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是否成立，我们要对每一个 $d \in D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$ 检验是否都有 $\mathcal{M} \vDash_{s:=d} \exists y Ryx \to Px$
- 当 D 是有穷集合时，这是能行的。当 D 无穷时则未必

谓词逻辑的语义

继续观察: $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是否成立是如何递归地依赖于其子公式 $\exists y Ryx \to Px$ 是否成立的?

- 为了检验 $\forall x(\exists y Ryx \to Px)$ 是否成立，我们要对每一个 $d \in D = \{$ 张三、李四、王五 $\}$ 检验是否都有 $\mathcal{M} \vDash_{s:=d} \exists y Ryx \to Px$
- 当 D 是有穷集合时，这是能行的。当 D 无穷时则未必

谓词逻辑的语义

定义 (有效性)

给定谓词逻辑语言 $\mathcal{L}$

- 我们称一个 $\mathcal{L}$ 公式 φ 是 逻辑有效的 或 有效的 （valid，记作 $\models \varphi$），当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M}$，任意 $\mathcal{M}$ 上的变元赋值 s 有 $\mathcal{M} \models_s \varphi$。

谓词逻辑的语义

定义 (有效性)

给定谓词逻辑语言 $\mathcal{L}$

- 假设 Σ 是一个 $\mathcal{L}$ 公式的集合，φ 是一个 $\mathcal{L}$ 公式，我们称 Σ 逻辑蕴含 （logcially implies） φ （记作 $\Sigma \vDash \varphi$），当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathcal{M}$，任意 $\mathcal{M}$ 上的变元赋值 s，如果对每个 Σ 中的公式 ψ 都有 $\mathcal{M} \vDash_s \psi$，那么 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$。

谓词逻辑的语义

- $\Sigma \vDash \varphi$ 即从 Σ 到 φ 的推理是有效的。反过来，如果 $\Sigma \nvDash \varphi$，则存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 s，满足 Σ 中的每个公式却不满足 φ
- 注意：我们在 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 和 $\Sigma \vDash \varphi$ 中都使用了符号 $\vDash$。这是个不幸的选择，请注意区分。
- $\vDash \varphi$ 即 $\emptyset \vDash \varphi$

谓词逻辑的语义

- $\Sigma \vDash \varphi$ 即从 Σ 到 φ 的推理是有效的。反过来，如果 $\Sigma \nvDash \varphi$，则存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 s，满足 Σ 中的每个公式却不满足 φ
- 注意：我们在 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 和 $\Sigma \vDash \varphi$ 中都使用了符号 $\vDash$。这是个不幸的选择，请注意区分。
- $\vDash \varphi$ 即 $\emptyset \vDash \varphi$

谓词逻辑的语义

- $\Sigma \vDash \varphi$ 即从 Σ 到 φ 的推理是有效的。反过来，如果 $\Sigma \nvDash \varphi$，则存在一个模型 $\mathcal{M}$ 和赋值 s，满足 Σ 中的每个公式却不满足 φ
- 注意：我们在 $\mathcal{M} \vDash_s \varphi$ 和 $\Sigma \vDash \varphi$ 中都使用了符号 $\vDash$。这是个不幸的选择，请注意区分。
- $\vDash \varphi$ 即 $\emptyset \vDash \varphi$

练习与讨论 10.1

下列是否成立?

1. $\models \exists x Px \lor \neg \exists x Px$
2. $\models \exists x Px \lor \forall x \neg Px$
3. $\models \exists x \exists y Rxy \to \exists x Rxx$
4. $\models \forall x \forall y Rxy \to \forall x Rxx$

练习与讨论 10.1

下列是否成立?

5. $\vDash \exists x \exists y Rxy \to \exists x \exists y Ryx$
6. $\vDash \forall x Rxx \to \forall x \exists y Rxy$
7. $\vDash \forall x Rxy \to \forall x \exists y Rxy$
8. $\vDash \forall x \exists y Rxy \to \forall x Rxy$

练习与讨论 10.2

证明，对任意公式 φ, ψ 有

$$\varphi \vDash \psi \text{，当且仅当} \vDash \varphi \to \psi$$

只涉及有穷条公式时，我们常用 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ 作为 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$ 的简写

练习与讨论 10.3

下列是否成立？

1. $\forall x Px \vDash \exists x Px$
2. $\forall x \forall y (Rxy \to Ryx), Rab \vDash Rba$
3. $\forall x \forall y (Rxy \to Ryx), Rab \vDash Raa$
4. $\forall x \forall y \forall z (Rxy \to Ryz \to Rxz), Rab, \neg Rac \vDash \neg Rbc$