逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

前情提要

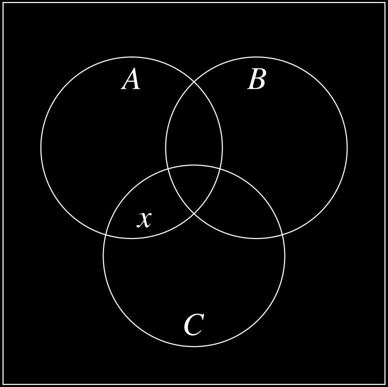
- 三段论：两个前提一个结论，涉及三个谓词：主项(结论中的第一个谓词)、谓项（结论中的第二个谓词）和中项
- 每个命题都有 A、E、I、O 之一的型，根据中项的位置有四种格。
- 如何判断三段论的有效性?
- 集合与文恩图
- 三段论与命题逻辑

三段论与命题逻辑

回忆: 在文恩图中，如果考虑 3 个谓词，可以划分出 8 个 单间 。考虑单个对象 x，我们可以把 x 满足 A（即 $A(x)$）简写为命题符号 a，$B(x)$ 简写为 b，$C(x)$ 简写为 c。此时，x 属于某个单间，给出了 a, b, c 这三个命题符号的一个 赋值 情况。

三段论与命题逻辑

例如，下图中 x 的位置对应于 $V(a)=1, V(b)=0, V(c)=1$，或简写为 $a\bar{b}c$



三段论与命题逻辑

- 类似地，4 个谓词的文恩图有 16 个单间
- n 个谓词的文恩图有 2^n 的单间
- 按照之前的设定，某个对象在文恩图中处于哪个单间对应于一组命题变元的赋值

三段论与命题逻辑

回到判断三段论 有效性 的问题

- 一个以 φ 和 ψ 为前提 χ 为结论的三段论是有效的，或记为 $\varphi, \psi \vDash \chi$，当且仅当 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 不是可满足的
- 如果 χ 是全称命题，那么 $\neg\chi$ 是特称命题；反之亦然
- 判断一个三段论是否成立，等价于判断命题集 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 是否可满足

三段论与命题逻辑

- 如果不采纳存在引入，任意三个全称命题（无论肯定还是否定）总是可满足的。为什么？
- 任意三个特称命题也是可满足的
- $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 只有当某个特称命题断言某个/某些单间有东西，而与其他命题断言某些单间没东西相矛盾时才会不可满足

三段论与命题逻辑

- 如果不采纳存在引入，任意三个全称命题（无论肯定还是否定）总是可满足的。为什么？
- 任意三个特称命题也是可满足的
- $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 只有当某个特称命题断言某个/某些单间有东西，而与其他命题断言某些单间没东西相矛盾时才会不可满足

三段论与命题逻辑

- 如果不采纳存在引入，任意三个全称命题（无论肯定还是否定）总是可满足的。为什么?
- 任意三个特称命题也是可满足的
- $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 只有当某个特称命题断言某个/某些单间有东西，而与其他命题断言某些单间没东西相矛盾时才会不可满足

三段论与命题逻辑

- 如果不采纳存在引入，任意三个全称命题（无论肯定还是否定）总是可满足的。为什么？
- 任意三个特称命题也是可满足的
- $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 只有当某个特称命题断言某个/某些单间有东西，而与其他命题断言某些单间没东西相矛盾时才会不可满足

三段论与命题逻辑

- 三段论中一个全称命题总是排除掉两个单间
- 一个特称命题总是断言两个单间中至少存在一个对象
- 假设 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中没有两个相同的命题，也没有一个命题是另一个命题的否定，那么两个特称命题和一个全称命题总是可满足的
- 只有一个特称和两个全称命题的情况才会不可满足

回忆：“结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等”

三段论与命题逻辑

- 三段论中一个全称命题总是排除掉两个单间
- 一个特称命题总是断言两个单间中至少存在一个对象
- 假设 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中没有两个相同的命题，也没有一个命题是另一个命题的否定，那么两个特称命题和一个全称命题总是可满足的
- 只有一个特称和两个全称命题的情况才会不可满足

回忆：“结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等”

三段论与命题逻辑

- 三段论中一个全称命题总是排除掉两个单间
- 一个特称命题总是断言两个单间中至少存在一个对象
- 假设 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中没有两个相同的命题，也没有一个命题是另一个命题的否定，那么两个特称命题和一个全称命题总是可满足的
- 只有一个特称和两个全称命题的情况才会不可满足

回忆：“结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等”

三段论与命题逻辑

- 三段论中一个全称命题总是排除掉两个单间
- 一个特称命题总是断言两个单间中至少存在一个对象
- 假设 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中没有两个相同的命题，也没有一个命题是另一个命题的否定，那么两个特称命题和一个全称命题总是可满足的
- 只有一个特称和两个全称命题的情况才会不可满足

回忆：“结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等”

三段论与命题逻辑

- 三段论中一个全称命题总是排除掉两个单间
- 一个特称命题总是断言两个单间中至少存在一个对象
- 假设 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中没有两个相同的命题，也没有一个命题是另一个命题的否定，那么两个特称命题和一个全称命题总是可满足的
- 只有一个特称和两个全称命题的情况才会不可满足

回忆：“结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等”

三段论与命题逻辑

- 为了判断三段论是否有效，我们只需要考虑 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中只有一个特称和两个全称命题的情况
- 这些情况下，若 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 可满足，存在一个只有一个对象的情况满足它。为什么？
- 所以判断三段论是否成立，我们只需要考虑三段论本身只有一个特称和两个全称命题的情况，而论域 U 中至多有一个对象的情况

三段论与命题逻辑

- 为了判断三段论是否有效，我们只需要考虑 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 中只有一个特称和两个全称命题的情况
- 这些情况下，若 $\{\varphi, \psi, \neg\chi\}$ 可满足，存在一个只有一个对象的情况满足它。为什么？
- 所以判断三段论是否成立，我们只需要考虑三段论本身只有一个特称和两个全称命题的情况，而论域 U 中至多有一个对象的情况

三段论与命题逻辑

假设论域中唯一可能存在的对象是 x。回忆，我们用 a 表示 $A(x)$，b 表示 $B(x)$，c 表示 $C(x)$

- 所有 A 是 B 就成了 $a \to b$
- 有的 A 是 B 就是 $a \wedge b$
- 所有 A 不是 B 就是 $a \to \neg b$
- 有的 A 不是 B 就是 $a \wedge \neg b$

三段论与命题逻辑

假设论域中唯一可能存在的对象是 x。回忆，我们用 a 表示 $A(x)$，b 表示 $B(x)$，c 表示 $C(x)$

- 所有 A 是 B 就成了 $a \to b$
- 有的 A 是 B 就是 $a \wedge b$
- 所有 A 不是 B 就是 $a \to \neg b$
- 有的 A 不是 B 就是 $a \wedge \neg b$

三段论与命题逻辑

由此，一个三段论是否有效的问题就变成了一组命题逻辑公式是否可满足的问题

例

有的 A 是 B	是有效的，当且仅当
所有 B 不是 C	$\{a \wedge b,\ b \to \neg c,\ \neg(a \wedge \neg c)\}$
有的 A 不是 C	不是可满足的

谓词逻辑

回忆：

要让我们的推理有规可循，唯一方法是把它做得像数学那样扎扎实实，这样我们一眼就可以看到错误所在，当人们之间产生争议的时候，我们只要说：让我们坐下来算一算（*let us calculate*），不需要更多的忙乱就可以看到谁是对的。

莱布尼茨 *The Art of Discovery* (1685)

谓词逻辑

他（莱布尼茨）关于通用文字或者哲学演算或推理的想法太过庞大……即使这是一个有价值的目标，它也无法一步就达到。我们无需为一个缓慢而步步为营的迫近而感到失望。当一个问题看似无法以其最一般的形态得到解决时，

弗雷格（1879）

谓词逻辑

可以暂时做个限定；或许它可以靠渐进的方式来征服。算术、几何、化学中的符号可以被看作是莱布尼茨的想法在特定领域的实现。而这里所给出的概念文字又增加了一个领域，实际上是一个中心领域，与其他所有领域相连。

弗雷格（1879）

谓词逻辑

- 命题逻辑忽略了基本命题的内部结构

例

- “张三在走路” 表示为 p
- “张三在倒立” 表示为 q

- 基本命题传递的信息丢失了

谓词逻辑

- 在谓词逻辑中，分别用 变元 / 常元 和 谓词 来表示对象与属性

例

- “张三在走路”表示为 Wa 或 $W(a)$
  即，张三这个对象具有“在走路”这个属性
- “张三在倒立”则表示为 Da 或 $D(a)$

- 相比命题逻辑，这又有多大优势？

谓词逻辑

- 假设我们有张三（a）李四（b）王五（c）……
- 我们用命题变元 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \ldots$ 分别表示 $Wa, Da, Wb, Db, Wc, Dc, \ldots$
- 假设我们知道一个人不能既在走路又在倒立，我们可以很自然地得到 $\neg(Wa \wedge Da)$, $\neg(Wb \wedge Db)$, $\neg(Wc \wedge Dc), \ldots$
- 谓词逻辑的另一项强大的组件 量词，让我们可以表示"一个人不能既在走路又在倒立"

谓词逻辑

谓词逻辑的语言

- **常元** （constants）：$a, b, c, \ldots$
- **变元** （variables）：$x, y, z, \ldots$
- **谓词** （predicate）：$P, Q, R, \ldots$

  谓词分为 1 元的 （unary）、2 元的 （binary）、3 元的 （ternary） ……

谓词逻辑

谓词逻辑的语言

例

- 张三在走路 Wa
- 张三看到李四 Sab （二元谓词）
- 张三把李四介绍给王五 $Iabc$ （三元谓词）

谓词逻辑

谓词逻辑的语言

- 命题连接词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 量词 （quantification）：$\forall, \exists$。每个量词总是携带一个变元

例

- $\exists x W x$
- $\forall x (W x \rightarrow \neg D x)$

谓词逻辑

- 为了方便记忆，我们一般用大写字母表示谓词，并且尽量贴合自然语言（英语或中文）。如，用 W 表示 “walk”，用 D 表示 “倒立”。具体的选择不重要，在每次翻译前申明即可。
- 在数学中，可能和遇到更多的谓词，我们甚至可以用 $P_1, P_2, \ldots$ 表示无穷个谓词

谓词逻辑

- 二元或多元谓词后面常元或变元的先后顺序是重要的，Sab（张三看到李四）与 Sba（李四看到张三）显然不同
- 日常语言中很少遇到 3 元以上的谓词，在数学中可以有任意 n 元的谓词

- 有时候一些谓词可以被另一些谓词定义

例

- 用 Dxy 表示 “x 和 y 是异性”，用 Fx 表示 x 是女性，用 Mx 表示 x 是男性。则 Dxy 当且仅当 $(Fx \to My) \wedge (Mx \to Fy)$
- 用 $Mxyz$ 表示 x 在 y, z 之间，用 $x < y$ 表示 x 小于 y。$Mxyz$ 当且仅当 $y < x \wedge x < z$

- 注意，有时为了贴合自然语言的阅读习惯，对一些 2 元谓词，我们会把诸如 $< xy$ 写成 $x < y$

谓词逻辑

- 常元对应于日常语言中的真名（proper name）或专有名词（speciel name），如“常凯申”、“耶路撒冷”，数学中的“0”、“π”……
- 变元在日常语言中没有严格的对应，它们与日常语言中的代词（pronouns）有类似的作用。例如：“张三看到了那个人，他在倒立”$Sax \wedge Dx$

例

- $2 < 5$，其中 2 和 5 是常元，命题的意思是明确的，真假是确定的
- $x < y$，其意义和真假取决于 x, y 的取值
  在这个意义上，$x < y$ 或 $x < 5$ 不是一个完整的语句

例

- $2 < 5$，其中 2 和 5 是常元，命题的意思是明确的，真假是确定的
- $x < y$，其意义和真假取决于 x, y 的取值

  在这个意义上，$x < y$ 或 $x < 5$ 不是一个完整的语句

例

- $S\,jx$，“张三看到了它”
- $S\,xy$，“这个看到了那个”
- $S\,xx$，“它看到了它自己”

谓词逻辑

谓词逻辑中的命题复合

例

- 张三没有看到李四，$\neg S\,ab$
- 张三看到了李四或王五，$S\,ab \vee S\,ac$
- 如果张三看到李四，他会开心的，$S\,ab \rightarrow Ha$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge Sax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge Sxa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge Sxx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge Sax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge Sxa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge Sxx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge S\,ax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge S\,xa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge S\,xx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge S ax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge S xa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge S xx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge Sax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge Sxa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge Sxx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge S\,ax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge S\,xa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge S\,xx)$

谓词逻辑

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge S\,ax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge S\,xa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge S\,xx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge Sax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge Sxa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge Sxx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x (Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x (Bx \wedge S\,ax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x (Bx \wedge S\,xa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x (Bx \wedge S\,xx)$

例 (一些量词的使用)

- 有人在走路 $\exists x W x$
- 有个男孩在走路 $\exists x(Bx \wedge Wx)$
- 张三看到一个男孩 $\exists x(Bx \wedge S\,ax)$
- 一个男孩看到了张三 $\exists x(Bx \wedge S\,xa)$
- 一个男孩看到了自己 $\exists x(Bx \wedge S\,xx)$

例 (一些量词的使用)

- 所有人都在倒立 $\forall x D x$
- 所有男孩都在倒立 $\forall x(Bx \to Dx)$
- 所有男孩都看到了张三 $\forall x(Bx \to S\,xa)$

例 (一些量词的使用)

- 所有人都在倒立 $\forall x D x$
- 所有男孩都在倒立 $\forall x(Bx \to Dx)$
- 所有男孩都看到了张三 $\forall x(Bx \to Sxa)$

例 (一些量词的使用)

- 所有人都在倒立 $\forall x Dx$
- 所有男孩都在倒立 $\forall x(Bx \to Dx)$
- 所有男孩都看到了张三 $\forall x(Bx \to Sxa)$

例 (一些量词的使用)

- 所有人都在倒立 $\forall x D x$
- 所有男孩都在倒立 $\forall x(B x \rightarrow D x)$
- 所有男孩都看到了张三 $\forall x(B x \rightarrow S x a)$

谓词逻辑

- 你或许注意到，**存在量词** $\exists x$ 后面跟着的复合公式往往是合取式，**全称量词** $\forall x$ 后面跟着的复合公式往往是蕴含式
- 尝试理解下面两个公式是什么意思
  - $\forall x(Bx \land Dx)$
  - $\exists x(Bx \to Dx)$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

谓词逻辑

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

例 (量词的叠置)

- 所有人都有爱的人 $\forall x \exists y Lxy$
- 有的人爱所有人 $\exists x \forall y Lxy$
- 每个人都有人爱 $\forall x \exists y Lyx$
- 有的人被所有人爱 $\exists x \forall y Lyx$

谓词逻辑

- 注意，上面的例子中尽管出现了很多变元，但整个公式的意思是确定的（不依赖于 x, y 具体指什么）
- 尝试把 L 解释成自然数的 $>$，把 $\forall x$ 理解成“所有自然数”，把 $\exists x$ 理解成“存在自然数”，理解成“所有/存在实数”呢?
- 为了更精确的翻译，我们总是需要约定量词的 **论域**（domain of discourse）

谓词逻辑

- 注意，上面的例子中尽管出现了很多变元，但整个公式的意思是确定的（不依赖于 x, y 具体指什么）
- 尝试把 L 解释成自然数的 $>$，把 $\forall x$ 理解成"所有自然数"，把 $\exists x$ 理解成"存在自然数"，理解成"所有/存在实数"呢？
- 为了更精确的翻译，我们总是需要约定量词的 **论域**（domain of discourse）

谓词逻辑

- 注意，上面的例子中尽管出现了很多变元，但整个公式的意思是确定的（不依赖于 x, y 具体指什么）
- 尝试把 L 解释成自然数的 $>$，把 $\forall x$ 理解成“所有自然数”，把 $\exists x$ 理解成“存在自然数”，理解成“所有/存在实数”呢？
- 为了更精确的翻译，我们总是需要约定量词的 论域 （domain of discourse）

练习与讨论 *

考虑“四段论”，涉及四个谓词，并且总是由三个前提 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ 一个结论 ψ 组成。给出关于四段论结构的进一步限制，并且证明：

- 有效的四段论中，$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 中有且仅有一个特称命题
- 说明如果 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ 是可满足的，存在一个只有一个对象的情况满足它

练习与讨论

把下列日常语言语句翻译为谓词逻辑公式:

- 如果张三爱李四，那么李四也爱张三
- 张三和李四彼此相爱
- 张三和李四不爱对方
- 如果张三和王五爱李四，那么李四和王五都不爱张三

练习与讨论

用谓词逻辑公式重新表述下列公式，只用 $<$（表示小于）和 $=$（表示等于）这两个谓词

- "$x \leq y \wedge y \leq z$"
- "$\neg(x \leq y \wedge y \leq z)$"