逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语义：重言式
- 证明：公理系统（公理、演绎规则），可靠性与完全性
- 表达力

关于谓词的推理

例

所有人都是生物

所有生物都是会死的

所有人都是会死的

直观上，这是一个有效的推理，但无法用命题逻辑来解释

关于谓词的推理

例

所有人都是生物

所有生物都是会死的

所有人都是会死的

直观上，这是一个有效的推理，但无法用命题逻辑来解释

关于谓词的推理

例

所有人都是生物

所有生物都是会死的

所有人都是会死的

尝试找到其中的“变元”和“逻辑常项”

关于谓词的推理

例

所有人都是生物

所有生物都是会死的

所有人都是会死的

尝试找到其中的“变元”和“逻辑常项”

关于谓词的推理

例

$$\frac{\begin{array}{c}\text{所有 } A \text{ 都是 } B \\ \text{所有 } B \text{ 都是 } C\end{array}}{\text{所有 } A \text{ 都是 } C}$$

尝试找到其中的“变元”和“逻辑常项”

关于谓词的推理

- 上面的例子被称作 三段论 （Syllogism）
  亚里士多德（Aristotle, 384 BC - 322 BC）：*Prior Analytics*
- 形式上，三段论总是由两个前提和一个结论组成。它们都不是复合命题

关于谓词的推理

- 上面例子中的 A, B, C 被称作 **谓词** （predicate）
- 谓词用来指称 **属性** （property），属性有 **内涵** （intension）和 **外延** （extension）
- 外延是对象组成的 **类** （class）或 **集合** （set）

关于谓词的推理

例

没有社会是静态的
所有学校都是社会

没有学校是静态的

关于谓词的推理

例

没有社会是静态的

所有学校都是社会

没有学校是静态的

关于谓词的推理

例

所有车都是会移动的

有的房子是车

有的房子是会移动的

关于谓词的推理

例

所有车都是会移动的

有的房子是车

有的房子是会移动的

关于谓词的推理

例

所有车都是会移动的

有的车是房子

有的房子是会移动的

关于谓词的推理

例

没有作业是有趣的

有的逻辑练习是作业

有的逻辑练习不是有趣的

关于谓词的推理

例

没有作业是有趣的

有的逻辑练习是作业

有的逻辑练习不是有趣的

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 **型** （type），有四种

Affirmo	所有 A 都是 B	全称肯定型
NEgo	没有 A 是 B	全称否定型
AffIrmo	有的 A 是 B	特称肯定型
NegO	有的 A 不是 B	特称否定型

- 其中“所有”、“有的”被称作 **全称量词** （universal quantifier）和 **存在量词** （existential quantifier）

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 **型** （type），有四种

Affirmo	所有 A 都是 B	全称肯定型
NEgo	没有 A 是 B	全称否定型
AffIrmo	有的 A 是 B	特称肯定型
NegO	有的 A 不是 B	特称否定型

- 其中“所有”、“有的”被称作 **全称量词** （universal quantifier）和 **存在量词** （existential quantifier）

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 型 （type），有四种

  A 所有 A 都是 B 全称肯定型

  E 没有 A 是 B 全称否定型

  I 有的 A 是 B 特称肯定型

  O 有的 A 不是 B 特称否定型

- 其中"所有"、"有的"被称作 全称量词 （universal quantifier）和 存在量词 （existential quantifier）

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 **型** （type），有四种

A	所有 A 是 B	全称肯定型
E	没有 A 是 B	全称否定型
I	有的 A 是 B	特称肯定型
O	有的 A 不是 B	特称否定型

- 其中“所有”、“有的”被称作 **全称量词** （universal quantifier）和 **存在量词** （existential quantifier）

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 型 （type），有四种

  A 所有 A 是 B 全称肯定型

  E 所有 A 不是 B 全称否定型

  I 有的 A 是 B 特称肯定型

  O 有的 A 不是 B 特称否定型

- 其中“所有”、“有的”被称作 全称量词 （universal quantifier）和 存在量词 （existential quantifier）

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 型 （type），有四种

  A 所有 A 是 B 全称肯定型

  E 所有 A 不是 B 全称否定型

  I 有的 A 是 B 特称肯定型

  O 有的 A 不是 B 特称否定型

- 其中“所有”、“有的”被称作 全称量词 （universal quantifier）和 存在量词 （existential quantifier）

关于谓词的推理

- 三段论的前提和结论中不是变元（谓词）的部分称作那些命题的 型 （type），有四种

A	所有 A 是 B	全称肯定型
E	所有 A 不是 B	全称否定型
I	有的 A 是 B	特称肯定型
O	有的 A 不是 B	特称否定型

- 其中“所有”、“有的”被称作 全称量词 （universal quantifier）和 存在量词 （existential quantifier）

关于谓词的推理

对当方阵（square of opposition）

所有 A 是 B	所有 A 不是 B
有的 A 是 B	有的 A 不是 B

存在引入（existential import）

关于谓词的推理

对当方阵（square of opposition）

所有 A 是 B	所有 A 不是 B
|	|
|	|
|	|
有的 A 是 B	有的 A 不是 B

存在引入（existential import）

关于谓词的推理

例（“存在”作为谓词)

上帝具有所有好的属性
“存在”是好的属性

上帝存在

关于谓词的推理

例（“存在”作为谓词)

所有好的属性都是上帝所具备的

“存在”是好的属性

“存在”是上帝所具备的

关于谓词的推理

存在不是事物的属性

- “这是红色的树叶”与“这是存在的红色的树叶”
- “孙悟空不存在”
- 现代逻辑学的处理：存在是属性的属性（二阶属性），是量词

关于谓词的推理

存在不是事物的属性

- “这是红色的树叶”与“这是存在的红色的树叶”
- “孙悟空不存在”
- 现代逻辑学的处理：存在是属性的属性（二阶属性），是量词

关于谓词的推理

存在不是（一阶）事物的属性

- “这是红色的树叶” 与 “这是存在的红色的树叶”
- “孙悟空不存在”
- 现代逻辑学的处理：存在是属性的属性（二阶属性），是量词

关于谓词的推理

三段论的格（Figure）

- 一般用 S 表示三段论结论中的第一个谓词，用 P 表示结论中的第二个谓词，用 M 表示只出现在前提中的谓词—— 中项 （middle term）
- 所有结论都形如

$$（所有/有的）S（是/不是）P$$

关于谓词的推理

三段论的格（Figure）

- 三段论（的前提）有下面 4 种格：

	格 1	格 2	格 3	格 4
大前提	$M - P$	$P - M$	$M - P$	$P - M$
小前提	$S - M$	$S - M$	$M - S$	$M - S$

关于谓词的推理

- 我们可以用型 + 格来确定一个三段论的形式：例如 AAA-1 是

$$\begin{array}{c} \text{所有 } M \text{ 是 } P \\ \text{所有 } S \text{ 是 } M \\ \hline \text{所有 } S \text{ 是 } P \end{array}$$

关于谓词的推理

- 我们可以用型 + 格来确定一个三段论的形式：例如 AEA-1 是

$$\frac{\begin{array}{c}\text{所有 } M \text{ 是 } P\\ \text{所有 } S \text{ 不是 } M\end{array}}{\text{所有 } S \text{ 不是 } P}$$

关于谓词的推理

一共有 $4^4 = 256$ 种可能的三段论形式，并非所有的形式是有效的，我们可以依据三段论的形式和下面的规则判断三段论是否有效：

- 结论中周延的词必须在前提中周延
- 中项必须周延至少一次
- 结论中否定命题的数目和前提中否定命题的数目相等
- 结论中特称命题的数目和前提中特称命题的数目相等

关于谓词的推理

我们需要更直观的方式帮助我们判断一个三段式是否有效

集合或类上的运算

记法

- 我们用 $x \in A$ 表示（对象）x 是（集合）A 中的元素，读作 “x 属于 A”
- 我们用 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 表示所有具有性质 φ 的对象组成的集合，也即属性 φ 的外延
- 我们也可以用枚举的方式表示集合： $\{a_1, a_2, \ldots\}$

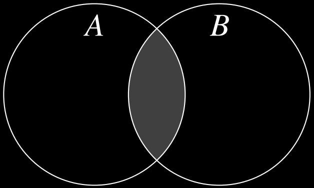
集合或类上的运算

集合上的二元运算

- **交** (intersection)： $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
- **并** (union)： $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
- **差** (difference)： $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

集合或类上的运算

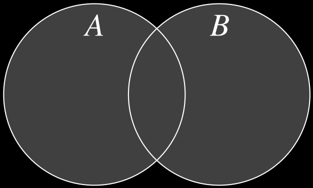
文恩图（Venn diagram）



阴影部分：$A \cap B$

集合或类上的运算

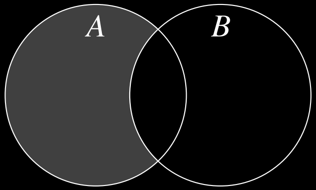
文恩图（Venn diagram）



阴影部分：$A \cup B$

集合或类上的运算

文恩图（Venn diagram）



阴影部分：$A \setminus B$

集合或类上的运算

定义

子集关系 给定两个集合 A 和 B，我们定义 $A \subset B$ （读作 A 是 B 的子集或 A 包含于 B），当且仅当所有 A 中的元素都是 B 中的元素

不难看出

- $A \cap B \subset A$
- $A \setminus B \subset A$
- $A, B \subset A \cup B$

集合或类上的运算

罗素悖论（Russell's Paradox）

- 集合本身也可以是集合中的元素。如 集合 X 的幂集 $P(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$
- 如果所有的属性都对应一个集合，那么 $R = \{X \mid X \notin X\}$ 也是一个集合
- 问 $R \in R$?

集合或类上的运算

通常在一个给定的（集合）论域（domain）中谈论集合：

$$\{x \in U \mid \varphi(x)\}$$

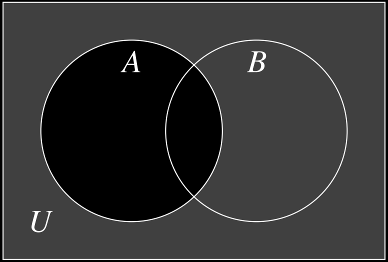
- 显然，$\{x \in U \mid \varphi(x)\} \subset U$
- 一般认为任何集合不属于自身，故

$$\{x \in U \mid x \notin x\} = U \notin U$$

集合或类上的运算

给定论域 U，我们可以定义集合的 补 （complement）

$$\overline{A} = A^{\mathrm{C}} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



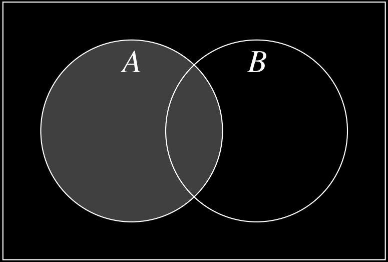
集合或类上的运算

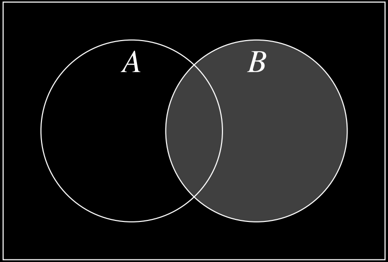
集合运算可以相互定义。例如，我们可以用交和补定义其他运算

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$

集合或类上的运算

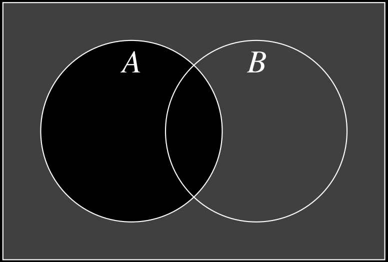
利用文恩图树算 $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$

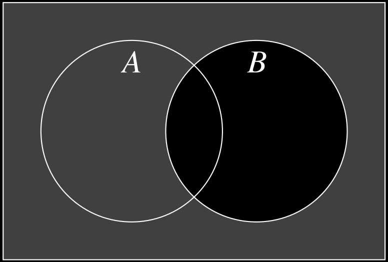




集合或类上的运算

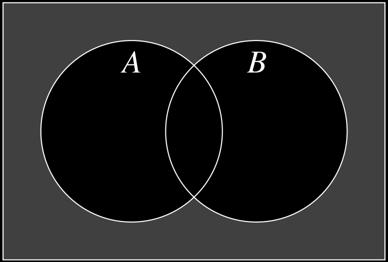
利用文恩图树算 $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$





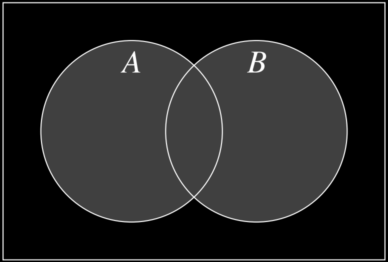
集合或类上的运算

利用文恩图树算 $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$



集合或类上的运算

利用文恩图树计算 $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$



集合或类上的运算

类似地，我们可以计算得出

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

集合或类上的运算

类似地，我们可以计算得出

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

集合或类上的运算

类似地，我们可以计算得出

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

集合或类上的运算

类似地，我们可以计算得出

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

集合或类上的运算

集合运算与命题逻辑

- $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $\overline{A} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$
- $\{x \in U \mid x \in A \to x \in B\} = ?$
- $A \setminus B = \{x \in U \mid \neg(x \in A \to x \in B)\} = \overline{\overline{A} \cup B} =$

集合或类上的运算

集合运算与命题逻辑

- $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $\overline{A} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$
- $\{x \in U \mid x \in A \to x \in B\} = ?$
- $A \setminus B = \{x \in U \mid \neg(x \in A \to x \in B)\} = \overline{\overline{A} \cup B} =$

集合或类上的运算

集合运算与命题逻辑

- $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $\overline{A} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$
- $\{x \in U \mid x \in A \rightarrow x \in B\} = ?$
- $A \setminus B = \{x \in U \mid \neg(x \in A \rightarrow x \in B)\} = \overline{\overline{A} \cup B} =$

集合或类上的运算

集合运算与命题逻辑

- $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $\overline{A} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$
- $\{x \in U \mid x \in A \rightarrow x \in B\} = ?$
- $A \setminus B = \{x \in U \mid \neg(x \in A \rightarrow x \in B)\} = \overline{\overline{A} \cup B} =$

集合或类上的运算

集合运算与命题逻辑

- $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $\overline{A} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$
- $\{x \in U \mid x \in A \to x \in B\} = ?$
- $A \setminus B = \{x \in U \mid \neg(x \in A \to x \in B)\} = \overline{\overline{A} \cup B} =$

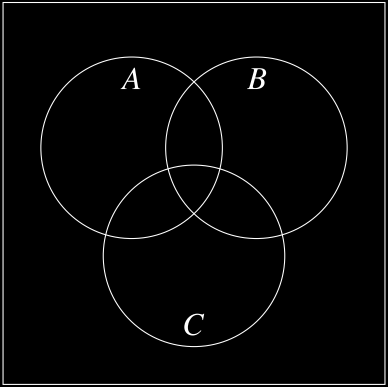
利用文恩图判断三段论的有效性

回忆: 一个推理是有效的，当且仅当在任何是的前提都为真的情况下，结论也为真

三段论中的可能情况是指什么?

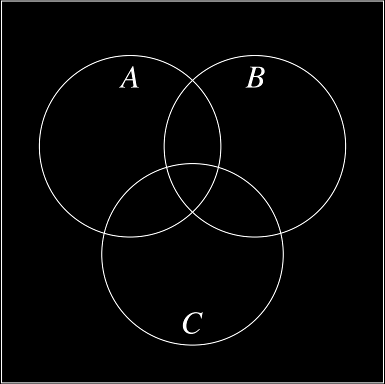
利用文恩图判断三段论的有效性

每个标准三段论中涉及 3 个谓词，我们需要考虑下面的文恩图。方框中一共被划分为 ? 个最小区域



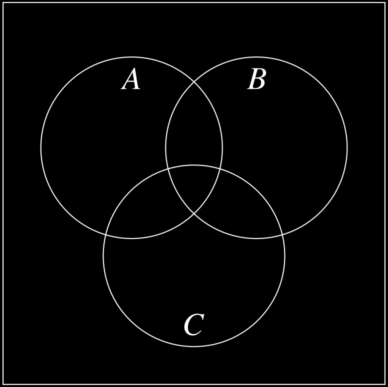
利用文恩图判断三段论的有效性

每个标准三段论中涉及 3 个谓词，我们需要考虑下面的文恩图。方框中一共被划分为 8 个最小区域



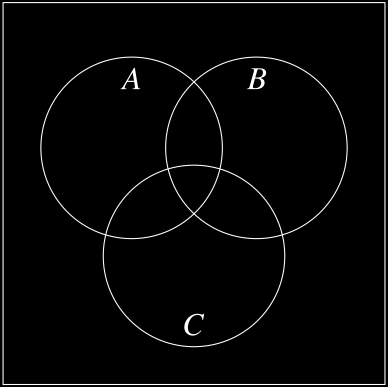
利用文恩图判断三段论的有效性

每个标准三段论中涉及 3 个谓词，我们需要考虑下面的文恩图。方框中一共被划分为 8 个最小区域



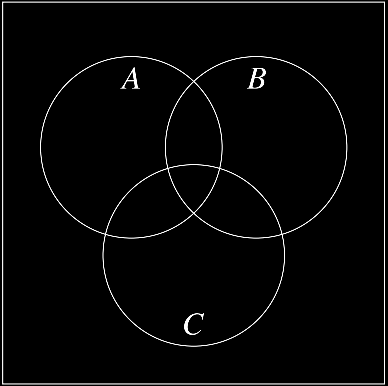
利用文恩图判断三段论的有效性

每个标准三段论中涉及 3 个谓词，我们需要考虑下面的文恩图。方框中一共被划分为 8 个 单间 （cell）



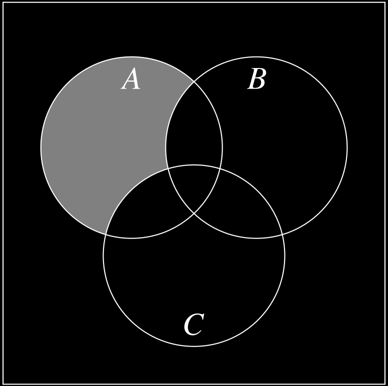
利用文恩图判断三段论的有效性

你能用集合运算表示这些单间吗？ 由一些单间组成的区域呢？



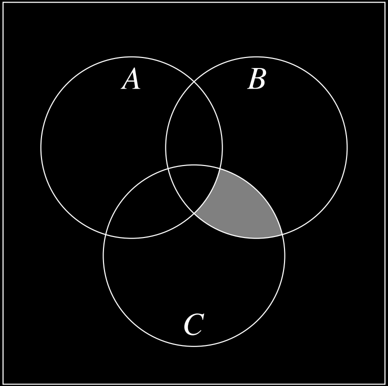
利用文恩图判断三段论的有效性

你能用集合运算表示这些单间吗？由一些单间组成的区域呢？



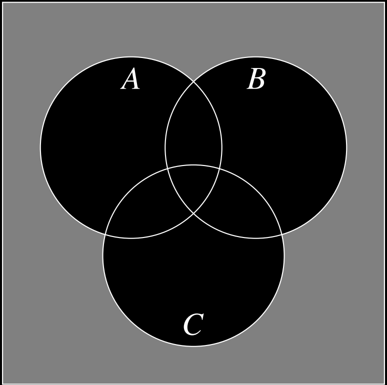
利用文恩图判断三段论的有效性

你能用集合运算表示这些单间吗？由一些单间组成的区域呢？



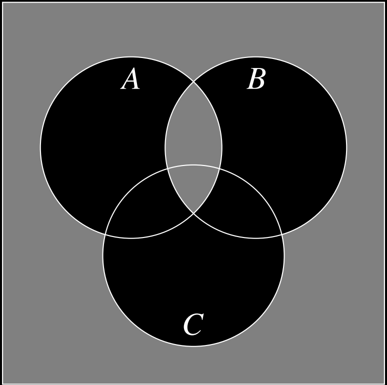
利用文恩图判断三段论的有效性

你能用集合运算表示这些单间吗？由一些单间组成的区域呢？



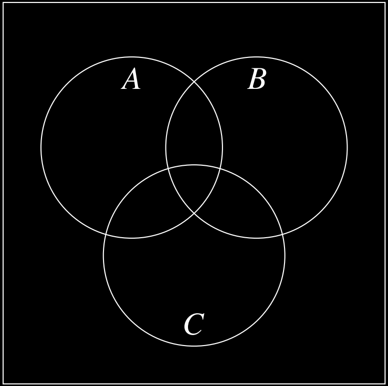
利用文恩图判断三段论的有效性

你能用集合运算表示这些单间吗？由一些单间组成的区域呢？



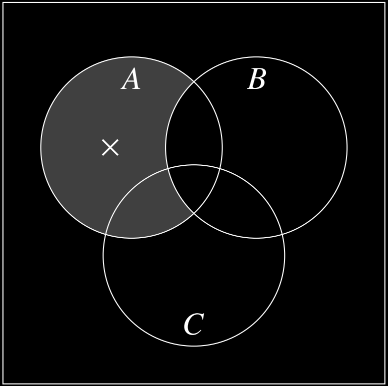
利用文恩图判断三段论的有效性

“所有 A 是 B” 关于下面的文恩图说了什么？ “所有 A 不是 B” 呢？ “有的 A 是 B”？ “有的 A 不是 B”？



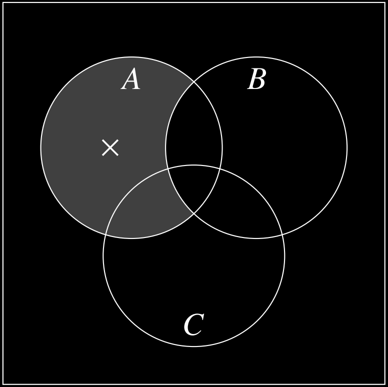
利用文恩图判断三段论的有效性

"所有 A 是 B" 关于下面的文恩图说了什么？ "所有 A 不是 B" 呢？ "有的 A 是 B"？ "有的 A 不是 B"？



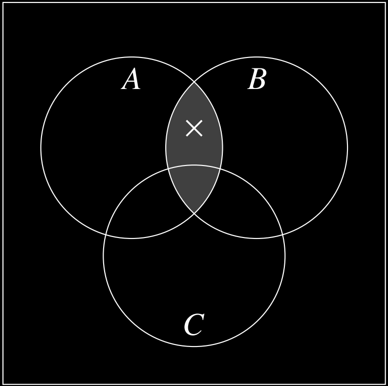
利用文恩图判断三段论的有效性

"所有 A 是 B" 关于下面的文恩图说了什么？ "所有 A 不是 B" 呢？ "有的 A 是 B"？ "有的 A 不是 B"？



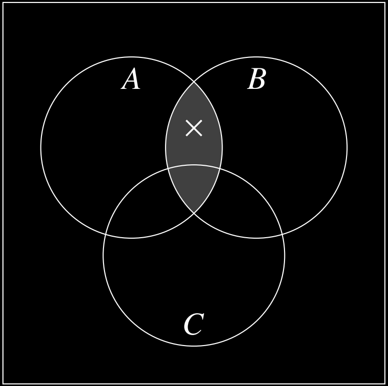
利用文恩图判断三段论的有效性

“所有 A 是 B” 关于下面的文恩图说了什么？ “所有 A 不是 B” 呢？ “有的 A 是 B”？ “有的 A 不是 B”？



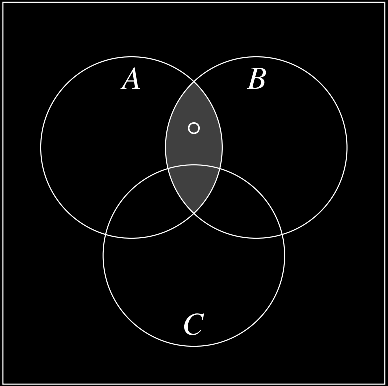
利用文恩图判断三段论的有效性

“所有 A 是 B” 关于下面的文恩图说了什么？ “所有 A 不是 B” 呢？ “有的 A 是 B”？ “有的 A 不是 B”？



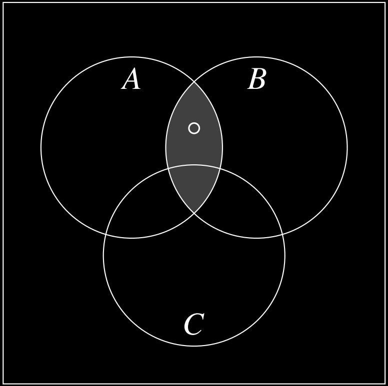
利用文恩图判断三段论的有效性

"所有 A 是 B" 关于下面的文恩图说了什么？ "所有 A 不是 B" 呢？ "有的 A 是 B"？ "有的 A 不是 B"？



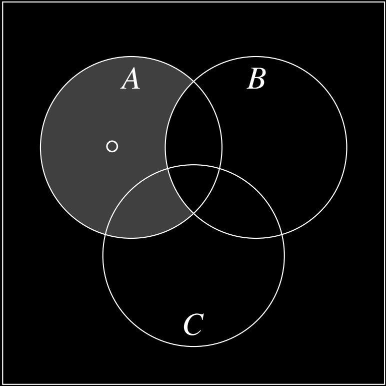
利用文恩图判断三段论的有效性

“所有 A 是 B” 关于下面的文恩图说了什么？ “所有 A 不是 B” 呢？ “有的 A 是 B”？ “有的 A 不是 B”？



利用文恩图判断三段论的有效性

“所有 A 是 B” 关于下面的文恩图说了什么？ “所有 A 不是 B” 呢？ “有的 A 是 B”？ “有的 A 不是 B”？



利用文恩图判断三段论的有效性

- 无论 A,E,I,O 谈论的都是文恩图中某个区域是否有元素
- 考虑每个最小区域—单间是否有元素，我们可以分出 $2^8 = 256$ 个 基本情况
- 有效的 三段论：在每个基本情况下，如果两个前提都成立，那么结论也成立

利用文恩图判断三段论的有效性

尝试用文恩图判断下面三段论的有效性

所有政客都是骗子

没有学生是骗子

没有学生是政客

利用文恩图判断三段论的有效性

尝试用文恩图判断下面三段论的有效性

所有政客都是骗子

没有学生是政客

没有学生是骗子

更多的谓词

例

$$\begin{array}{l}\text{所有 } A \text{ 是 } B \\ \text{没有 } C \text{ 是 } B \\ \text{有的 } C \text{ 是 } D \\ \hline \text{有的 } D \text{ 不是 } A\end{array}$$

练习与讨论

下面三段论的中项是什么？

没有作业是有趣的

有的逻辑练习是作业

有的逻辑练习不是有趣的

练习与讨论

尝试用文恩图判断下面三段论的有效性

有的哲学家是希腊公民

没有希腊公民是奴隶

没有哲学家是奴隶

练习与讨论

尝试用文恩图判断下面三段论的有效性

没有希腊公民是奴隶

没有奴隶是哲学家

没有希腊公民是哲学家

练习与讨论

尝试用文恩图判断下面三段论的有效性

没有希腊公民是奴隶

有的奴隶是哲学家

有的哲学家不是希腊公民

练习与讨论 *

- 能否描述一个判断三段论有效性的程序?
- 假设全称量词被按照存在引入来解释。即 “所有 A 是 B” 蕴含 “有的 A 是 B”。能否修正判断三段论推理有效性的方法?

练习与讨论 *

我们用集合间的包含于关系 $A \subset B$ 作为初始概念，尝试不用属于关系 $\in$ 来定义下面的集合或运算

- 空集 $\emptyset$
- $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$