逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

前情提要

- 日常语言中的逻辑词
- 命题逻辑的形式语言
  - 公式的定义（递归定义）
  - 构造树与括号的使用

命题逻辑的语义

回忆: 在一个具体的命题或推理中，我们根据需要来决定基本命题。确定了基本命题的数量后，很容易算出其真假组合的个数。我们把后者称作一个 **语义情形** （semantic situation）

例

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$ 中有三个命题变元，表示三个互相独立的基本命题（也作 **原子命题** ，atomic formula），它们的语义情形有:

$$\{pqr, pq\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}qr, \bar{p}q\bar{r}, \bar{p}\bar{q}q, \bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$$

命题逻辑的语义

回忆: 在一个具体的命题或推理中，我们根据需要来决定基本命题。确定了基本命题的数量后，很容易算出其真假组合的个数。我们把后者称作一个 语义情形 （semantic situation）

例

$(\neg p \vee q) \to r$ 中有三个命题变元，表示三个互相独立的基本命题（也作 原子命题 ， atomic formula），它们的语义情形有:

$$\{pqr, pq\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}qr, \bar{p}q\bar{r}, \bar{p}\bar{q}q, \bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$$

命题逻辑的语义

我们可以把一个语义情形看作是一个 赋值函数 。例如，$p\bar{q}r$ 可以看作这样一个函数：

- $V_{p\bar{q}r}(p) = T$
- $V_{p\bar{q}r}(q) = F$
- $V_{p\bar{q}r}(r) = T$

命题逻辑的语义

我们可以把一个语义情形看作是一个 **赋值函数** 。例如，

$p\bar{q}r$ 可以看作这样一个函数：

- $V_{p\bar{q}r}(p) = 1$
- $V_{p\bar{q}r}(q) = 0$
- $V_{p\bar{q}r}(r) = 1$

命题逻辑的语义

例 (函数)

- 自然数上的 后继函数 （Successor function）：

  $S(x) = x + 1$

- 每个逻辑符号对应一个 公式构造函数 ：
  - $f_{\neg}(\varphi) = (\neg\varphi)$
  - $f_{\rightarrow}(\varphi, \psi) = (\varphi \rightarrow \psi)$

确定一个函数，我们需要知道它的 定义域 （domain）以及定义域中每个“输入”对应的值

命题逻辑的语义

经典命题逻辑语义的基本设定：

- 在任何情形下，一个命题非真即假
  无论它是原子命题还是复合命题（complex formula）
- 一个命题的语义只有真假

命题逻辑的语义

如何表述一个逻辑常项，即逻辑连接词的语义?

- 逻辑连接词的语义：从基本命题的语义（真假）得到复合命题语义（真假）的规则

命题逻辑的语义

真值表　(truth table)

φ	$\neg\varphi$
1	**0**
0	**1**

命题逻辑的语义

真值表 (truth table)

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	**0**	**1**	**1**	**0**
0	0	**0**	**0**	**1**	**1**

实质蕴涵

注意: 根据上述真值表对 $\varphi \to \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候，$\varphi \to \psi$ 就为真。“$\to$” 的这种语义被称作 **实质蕴涵** （material implication）

例

- 向西航行能够到达印度 $\to$ 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 $\to$ 所有人都会开心

实质蕴涵

注意: 根据上述真值表对 $\varphi \to \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候，$\varphi \to \psi$ 就为真。“$\to$” 的这种语义被称作 **实质蕴涵** （material implication）

例

- 向西航行能够到达印度 $\to$ 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 $\to$ 所有人都会开心

实质蕴涵

注意：根据上述真值表对 $\varphi \to \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候，$\varphi \to \psi$ 就为真。“$\to$”的这种语义被称作**实质蕴涵**（material implication）

例

- 向西航行不能到达印度 $\to$ 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 $\to$ 所有人都会开心

实质蕴涵

注意: 根据上述真值表对 $\varphi \to \psi$ 的解释，只要 φ 为假或 ψ 为真的时候，$\varphi \to \psi$ 就为真。"$\to$"的这种语义被称作 **实质蕴涵** （material implication）

例

- 向西航行不能到达印度 $\to$ 地球是圆的
- 纳粹赢得了二战 $\to$ 所有人都会开心

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	?
0	0	?

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**1**

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**0**

实质蕴涵

在命题逻辑的语义中，我们只关心真假

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

实质蕴涵

例

- 任给一个数，如果它大于 3，那么它大于 2
- 如果中国队能进世界杯 16 强，我给全班 A

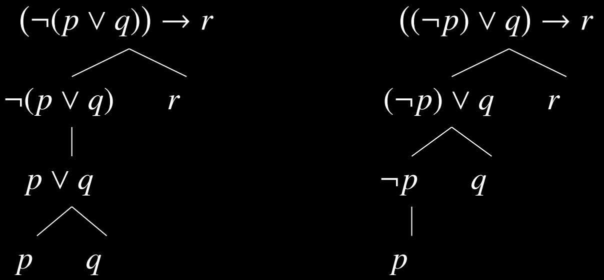
实质蕴涵

例

- 任给一个数，如果它大于 3，那么它大于 2
- 如果中国队能进世界杯 16 强，我给全班 A

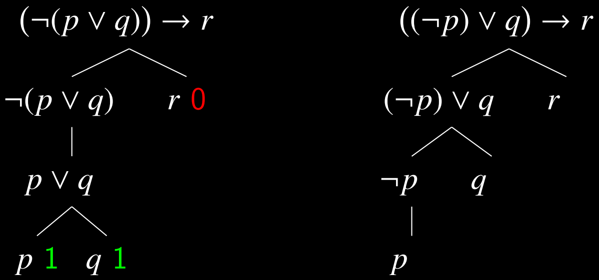
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



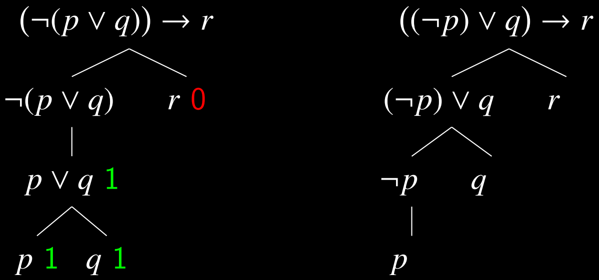
利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值

$(\neg(p \vee q)) \to r$

$\neg(p \vee q)$ 0 $\quad r$ 0

$p \vee q$ 1

p 1 $\quad q$ 1

$((\neg p) \vee q) \to r$

$(\neg p) \vee q \quad r$

$\neg p \quad q$

p

利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值

$$(\neg(p \vee q)) \rightarrow r \quad 1$$

$$\neg(p \vee q) \quad 0 \qquad r \quad 0$$

$$p \vee q \quad 1$$

$$p \quad 1 \qquad q \quad 1$$

$$((\neg p) \vee q) \rightarrow r$$

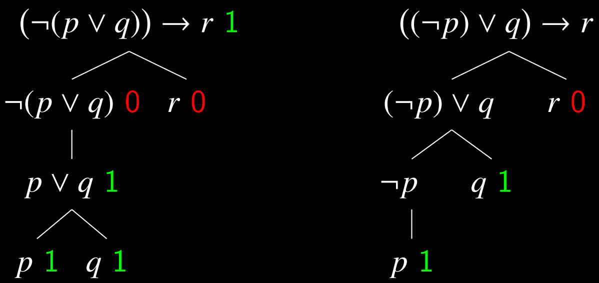
$$(\neg p) \vee q \qquad r$$

$$\neg p \qquad q$$

$$p$$

利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值



利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值

$$(\neg(p \vee q)) \rightarrow r \; 1$$

$$\neg(p \vee q) \; 0 \qquad r \; 0$$

$$p \vee q \; 1$$

$$p \; 1 \qquad q \; 1$$

$$((\neg p) \vee q) \rightarrow r$$

$$(\neg p) \vee q \qquad r \; 0$$

$$\neg p \; 0 \qquad q \; 1$$

$$p \; 1$$

利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值

$(\neg(p \vee q)) \rightarrow r$ 1

$\neg(p \vee q)$ 0 $\quad r$ 0

$p \vee q$ 1

p 1 $\quad q$ 1

$((\neg p) \vee q) \rightarrow r$

$(\neg p) \vee q$ 1 $\quad r$ 0

$\neg p$ 0 $\quad q$ 1

p 1

利用真值表计算

真值表告诉我们，给定基本命题的真值，如何递归地计算复杂公式的真值

- $(\neg(p \vee q)) \to r$ 1
  - $\neg(p \vee q)$ 0
    - $p \vee q$ 1
      - p 1
      - q 1
  - r 0

- $((\neg p) \vee q) \to r$ 0
  - $(\neg p) \vee q$ 1
    - $\neg p$ 0
      - p 1
    - q 1
  - r 0

利用真值表计算

p	q	r	$(\neg(p \vee q)) \to r$	$((\neg p) \vee q) \to r$
1	1	1	1	1
1	1	0	**1**	**0**
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

利用真值表计算

p	q	r	$(\neg(p \vee q)) \to r$	$((\neg p) \vee q) \to r$
1	1	1	**1**	**1**
1	1	0	**1**	**0**
1	0	1	**1**	**1**
1	0	0	**1**	**1**
0	1	1	**1**	**1**
0	1	0	**1**	**0**
0	0	1	**1**	**1**
0	0	0	**0**	**0**

利用真值表计算

回忆：一个命题逻辑的 语义情形 是一个函数 V。例如：

$$V(p) = 1,\ V(q) = 1,\ V(r) = 0$$

根据真值表，我们可以把 V 扩张为对任意只含有命题符号 p, q, r 的公式的赋值，例如：

- $V((\neg(p \vee q)) \to r) = 1$
- $V(((\neg p) \vee q) \to r) = 0$

利用真值表计算

回忆：一个命题逻辑的 语义情形 是一个函数 V^{110}。例如：

$$V^{110}(p) = 1,\ V^{110}(q) = 1,\ V^{110}(r) = 0$$

根据真值表，我们可以把 V 扩张为对任意只含有命题符号 p, q, r 的公式的赋值，例如：

- $V^{110}((\neg(p \vee q)) \to r) = 1$
- $V^{110}(((\neg p) \vee q) \to r) = 0$

命题逻辑的有效推理

定义

任给命题逻辑公式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ，我们说 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 到 ψ 的推理是有效的 或 ψ 是 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 的（有效）推论 （consequence），当且仅当对任意赋值函数 V，若 $V(\varphi_1) = \cdots = V(\varphi_n) = 1$，则 $V(\psi) = 1$。

命题逻辑的有效推理

定义

任给命题逻辑公式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ，我们说 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 到 ψ 的推理是有效的 或 ψ 是 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 的（有效）推论 （consequence），当且仅当对关于 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ 中出现命题符号的任意赋值函数 V，若 $V(\varphi_1) = \cdots = V(\varphi_n) = 1$，则 $V(\psi) = 1$。

命题逻辑的有效推理

定义

任给命题逻辑公式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ，我们说 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 到 ψ 的推理是有效的 或 ψ 是 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 的（有效）推论（consequence），当且仅当对关于 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ 中出现命题符号的任意赋值函数 V，若 $V(\varphi_1) = \cdots = V(\varphi_n) = 1$，则 $V(\psi) = 1$。此时，我们记

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \to \psi, \neg\psi \vDash \neg\varphi$$

φ	ψ	$\varphi \to \varphi$	$\neg\psi$	$\neg\psi$
1	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**0**	**1**	**0**
0	1	**1**	**0**	**1**
0	0	**1**	**1**	**1**

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \to \psi, \neg\psi \vDash \neg\varphi$$

φ	ψ	$\varphi \to \varphi$	$\neg\psi$	$\neg\psi$
1	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**0**	**1**	**0**
0	1	**1**	**0**	**1**
0	0	**1**	**1**	**1**

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \to \psi, \neg\varphi \vDash \neg\psi$$

φ	ψ	$\varphi \to \varphi$	$\neg\psi$	$\neg\psi$
1	1	**1**	**0**	**0**
1	0	**0**	**0**	**1**
0	1	**1**	**1**	**0**
0	0	**1**	**1**	**1**

命题逻辑的有效推理

我们可以利用真值表来检查一个推理是否有效。

例

$$\varphi \to \psi, \neg\varphi \vDash \neg\psi$$

φ	ψ	$\varphi \to \varphi$	$\neg\psi$	$\neg\psi$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

命题逻辑的有效推理

有效推理有一个对偶的概念： 可满足性

定义

我们称一集命题逻辑公式 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ 是 可满足的 （satisfiable），当且仅当存在一个赋值函数（语义情形）V，使得每个 $V(\varphi_i) = 1$ （$i = 1, \ldots, n$）

命题逻辑的有效推理

不难看出，

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

当且仅当

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

不是可满足的

重言式

定义

我们用 $\vDash \varphi$ 表示 空集 $\emptyset \vDash \varphi$，也即 $\{\neg\varphi\}$ 不可满足。此时，我没也称 φ 是 重言式 （tautology）。

重言式

例 (几则常见的重言式)

- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ （非）矛盾律
- $\varphi \vee \neg\varphi$ 排中律
- $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ 双重否定

重言式

例 (几则常见的重言式)

- $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 德摩根律

  $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (De Morgan laws)

- $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

  $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ 分配律

重言式

根据定义不难看出，所有有效的推理可以被“编码”为重言式

事实

任给公式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 和 ψ，

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi \iff (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi \text{ 是重言式}$$

练习与讨论

计算并构造下列公式的真值表

1. $(p \to q) \vee (q \to p)$
2. $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$

练习与讨论

不考虑括号省略规则，利用真值表分析通过在不同的位置插入括号，下面的符号串可以被解释为那几个不同义的命题逻辑公式?

$$\neg p \to q \vee r$$

练习与讨论

利用真值表判断下面两个判断是否成立

- $\neg p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vDash p \wedge r$
- $\neg p \rightarrow (q \vee r), \neg q \vDash p \vee r$

练习与讨论

利用真值表判断下面两个判断是否成立

- $p \to (q \land r), \neg q \vDash \neg p$
- $p \to (q \lor r), \neg q \vDash \neg p$

练习与讨论

给出下列公式的真值表

- $(p \vee q) \vee \neg(p \vee (q \wedge r))$
- $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
- $((p \leftrightarrow q) \wedge (\neg q \to r)) \leftrightarrow (\neg(p \leftrightarrow r) \to q)$

练习与讨论

我没称两个公式 φ 和 ψ 是 逻辑等价的 （logically equivalent，记作 $\varphi \vDash\Dashv \psi$），当且仅当 $\varphi \vDash \psi$ 且 $\psi \vDash \varphi$。利用真值表判断下面的公式对是否是逻辑等价的。

- $\neg(\varphi \to \psi)$ 和 $\varphi \vee \neg\psi$
- $\neg(\varphi \to \psi)$ 和 $\varphi \wedge \neg\psi$

练习与讨论 *

一个含有 n 个命题符号的命题逻辑公式的真值表可以看作是一个 n 元函数。

例

假设 $\alpha = ((\neg p) \vee q) \to r$，定义 B_α 函数，满足对每个赋值 V 都有

$$B_\alpha(V(p), V(q), V(r)) = V(\alpha)$$

练习与讨论 *

1. 函数 B_α 的定义域是什么?
2. 是否存在不同的公式 α, β 使得 B_α 和 B_β 是相同的函数
3. 考虑至多含有 n 个命题符号的公式 α，有多少不同的 B_α?