逻辑学

杨睿之

复旦大学哲学学院

2023 年秋季

课程信息

- 时间地点：
  - 周一 13:30 - 15:10，HGX507 （讲座课）
  - 周一 15:25-17:05，HGX504、HGX503、HGX410 （讨论课、习题课、讲座课）
    (第三周开始，每单周)
- 网站：`https://web.yangruizhi.cyou/logic2023/`
- 教材：尚无

课程团队

- 杨睿之：yangruizhi@fudan.edu.cn
- 郭子恒：22210160027@m.fudan.edu.cn
- 姜乐怀：23210160024@m.fudan.edu.cn

前情提要

一些例子

- 服务员上菜
- 手机无法充电
- 3×3 数独

前情提要

- 逻辑往往伴随 推理 （inference）出现
- 推理可分 有效的 （valid）与 无效的 （invalid）
- 推理由命题组成，命题或真或假，有效推理中，若前提皆真，则结论真
- 推理的 样式 / 形式 与基本命题
- 符号的使用：揭示样式的结构，指称样式

练习与讨论

回忆“手机无法充电”这个例子。如何完善这个例子，使之与“服务员上菜”以及“3×3 数独”例子中的推理样式相符，且更严谨?

日常语言中的逻辑词

书接上回：在我们谈论一个推理的样式时，我们区分了可以替换的部分与保留的部分。

例

- 盖浇饭 或 炒饭 或 面，非 盖浇饭，非 炒饭 $\Rightarrow$ 是 面
- 电源 或 手机 或 线，非 电源，非 手机 $\Rightarrow$ 是 线
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 是 3

日常语言中的逻辑词

书接上回: 在我们谈论一个推理的样式时，我们区分了可以替换的部分与保留的部分。

例

- 盖浇饭 或 炒饭 或 面，非 盖浇饭，非 炒饭 $\Rightarrow$ 是 面
- 电源 或 手机 或 线，非 电源，非 手机 $\Rightarrow$ 是 线
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 是 3

日常语言中的逻辑词

书接上回: 在我们谈论一个推理的样式时，我们区分了可以替换的部分与保留的部分。

例

- 盖浇饭 或 炒饭 或 面，非 盖浇饭，非 炒饭 $\Rightarrow$ 是 面
- 电源 或 手机 或 线，非 电源，非 手机 $\Rightarrow$ 是 线
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 是 3

日常语言中的逻辑词

书接上回: 在我们谈论一个推理的样式时，我们区分了可以替换的部分与保留的部分。

例

- 盖浇饭 或 炒饭 或 面，非 盖浇饭，非 炒饭 $\Rightarrow$ 是 面
- 电源 或 手机 或 线，非 电源，非 手机 $\Rightarrow$ 是 线
- 1 或 2 或 3，非 1，非 2 $\Rightarrow$ 是 3

日常语言中的逻辑词

下面这句话是什么意思?

她手里不是有 K 或有黑桃的话就有 A。

日常语言中的逻辑词

下面这句话是什么意思?

她手里不是有 K 或有黑桃的话就有 A。

日常语言中的逻辑词

下面这句话是什么意思?

She has an Ace if she does not have a King or Spades.

日常语言中的逻辑词

例

在一局升级的无主局中，出到最后一轮。牌手记得大牌里只有

和

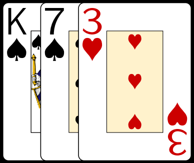
没出，她判断其他人手里

不是有 K 或有黑桃的话就有 A

日常语言中的逻辑词

例

在一局德州扑克（Texas hold’em）中，发出了三张公共牌



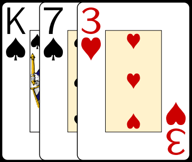
牌手在看到对方的下注后思考她可能的牌型：

不是有 K 或有黑桃的话就有 A

日常语言中的逻辑词

例

在一局德州扑克（Texas hold’em）中，发出了三张公共牌



牌手在看到对方的下注后思考她可能的牌型：

不是有 K 或有黑桃的话就有 A

日常语言中的逻辑词

我们尝试借用括号帮助厘清这句话的意思，消除歧义

- 不是有 K 或有黑桃的话就有 A
  - 如果（不是有 K）或有黑桃，那么就有 A
  - 如果不是（有 K 或有黑桃），那么就有 A

日常语言中的逻辑词

我们尝试借用括号帮助厘清这句话的意思，消除歧义

- 如果不是有 K 或有黑桃，那么就有 A
  - 如果（不是有 K）或有黑桃，那么就有 A
  - 如果不是（有 K 或有黑桃），那么就有 A

日常语言中的逻辑词

我们尝试借用括号帮助厘清这句话的意思，消除歧义

- 如果不是有 K 或有黑桃，那么就有 A
  - 如果（不是有 K）或有黑桃，那么就有 A
  - 如果不是（有 K 或有黑桃），那么就有 A

日常语言中的逻辑词

我们尝试借用括号帮助厘清这句话的意思，消除歧义

- 如果不是有 K 或有黑桃，那么就有 A
  - 如果（不是有 K）或有黑桃，那么就有 A
  - 如果不是（有 K 或有黑桃），那么就有 A

日常语言中的逻辑词

例

考试试卷中出现的选做题

你可以做第三题或做第四题

日常语言中的逻辑词

例

考试试卷中出现的选做题

你可以做第三题或做第四题

日常语言中的逻辑词

例

你穿越到了东汉末年庐江郡

你可以结孙策**或**结周瑜

日常语言中的逻辑词

例

你穿越到了东汉末年庐江郡

你要么结孙策，要么结周瑜

日常语言中的逻辑词

有一天你发现你的 D 盘无法访问了，并收到一封电子邮件：

“你的数据将永远丢失，除非 给 XX 地址转 1 个比特币”

日常语言中的逻辑词

牛顿第一运动定律（Newton's first law of motion）

> *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

日常语言中的逻辑词

牛顿第一运动定律（Newton's first law of motion）

Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.

Translation by Andrew Motte

日常语言中的逻辑词

牛顿第一运动定律（Newton's first law of motion）

> *Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by the forces impressed.*

Translation by Whitman Cohen

日常语言中的逻辑词

牛顿第一运动定律（Newton's first law of motion）

一切物体总保持匀速直线运动状态或静止状态，直到有外力迫使它改变这种状态为止。

人教版高中物理必修一

逻辑连接词

日常语言中的“逻辑词”中，有些是同义词，有些涉及不同的语法结构（如出现的位置不同），也有些有不可忽视的歧义。所以有必要引入规范的表达。

逻辑连接词

符号	日常语言中的逻辑词	术语
$\neg$	不是，并非	否定（negation）
$\wedge$	并且，和，但是	合取（conjunction）
$\vee$	或	析取（disjunction）
$\rightarrow$	如果…那么…，若…则…	蕴涵（implication）
$\leftrightarrow$	当且仅当	等价（equivalence）

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- 做第三题或第四题
- 结孙策或结周瑜

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- $p \vee q$
- 结孙策或结周瑜

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- $p \vee q$
- $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- 如果（不是有 K）或有黑桃，那么就有 A
- 如果不是（有 K 或有黑桃），那么就有 A

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- $((\neg K) \vee S) \to A$
- 如果不是（有 K 或有黑桃），那么就有 A

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- $((\neg K) \vee S) \to A$
- $(\neg(K \vee S)) \to A$

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- 牛顿第一运动定律：

  如果没有外力，那么静止或匀速直线

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- 牛顿第一运动定律：

  $\neg f \to s$

逻辑连接词

回忆：我们提到可以用 p, q, r 之类的字母指代推理中的基本命题（可替换的部分），由此

- 牛顿第一运动定律：

  $\neg s \to f$

基础命题

注意，在“牛顿第一运动定律”的形式化中，我们并没有进一步把“静止或匀速直线运动”进一步分解为“$r \vee u$”

我们说可以用字母指代“基本命题”，什么是基本命题？

逻辑原子主义（Logical atomism）

世界可以被分解为终极逻辑事实（或逻辑原子），它们不可再分且彼此独立

过时的哲学理论

约定：（翻译日常语言时）我们根据需要来确定基本命题，尽量保持基本命题彼此独立

基础命题

注意，在“牛顿第一运动定律”的形式化中，我们并没有进一步把“静止或匀速直线运动”进一步分解为“$r \vee u$”

我们说可以用字母指代“基本命题”，什么是基本命题?

逻辑原子主义（Logical atomism）

世界可以被分解为终极逻辑事实（或逻辑原子），它们不可再分且彼此独立

过时的哲学理论

约定：（翻译日常语言时）我们根据需要来确定基本命题，尽量保持基本命题彼此独立

基础命题

注意，在“牛顿第一运动定律”的形式化中，我们并没有进一步把“静止或匀速直线运动”进一步分解为“$r \vee u$”

我们说可以用字母指代“基本命题”，什么是基本命题?

逻辑原子主义（Logical atomism）

世界可以被分解为终极逻辑事实（或逻辑原子），它们不可再分且彼此独立

过时的哲学理论

约定：（翻译日常语言时）我们根据需要来确定基本命题，尽量保持基本命题彼此独立

基础命题

注意，在“牛顿第一运动定律”的形式化中，我们并没有进一步把“静止或匀速直线运动”进一步分解为“$r \vee u$”

我们说可以用字母指代“基本命题”，什么是基本命题？

逻辑原子主义（Logical atomism）

世界可以被分解为终极逻辑事实（或逻辑原子），它们不可再分且彼此独立

过时的哲学理论

约定：（翻译日常语言时）我们根据需要来确定基本命题，尽量保持基本命题彼此独立

基础命题

注意，在“牛顿第一运动定律”的形式化中，我们并没有进一步把“静止或匀速直线运动”进一步分解为“$r \vee u$”

我们说可以用字母指代“基本命题”，什么是基本命题?

逻辑原子主义（Logical atomism）

世界可以被分解为终极逻辑事实（或逻辑原子），它们不可再分且彼此独立

过时的哲学理论

约定：（翻译日常语言时）我们根据需要来确定基本命题，尽量保持基本命题彼此独立

逻辑连接词

回到对日常语言的翻译

- 电源或手机或线，非电源，非手机 $\Rightarrow$ 是线

$$\frac{p \vee q \vee r, \quad \neg p, \quad \neg q}{r}$$

逻辑连接词

回到对日常语言的翻译

- 电源或手机或线，非电源，非手机 ⇒ 是线

$$\frac{p \vee q \vee r, \quad \neg p, \quad \neg q}{r}$$

形式语言

我们把形如 $p \vee q \vee r$、$(\neg K \vee S) \rightarrow A$ 这样的东西称作一种 形式语言 （formal language）的 公式 （formula）

通过预定义的符号和括号的协助，形式语言可以避免一些日常语言中的歧义。

例 (形式语言公式的构造树)

$$((\neg p) \vee q) \rightarrow r$$

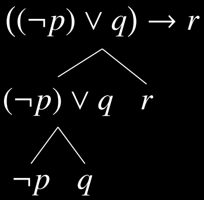
例 (形式语言公式的构造树)

$$((\neg p) \vee q) \to r$$

$$(\neg p) \vee q \qquad r$$

形式语言

例 (形式语言公式的构造树)



形式语言

例 (形式语言公式的构造树)

$$((\neg p) \vee q) \to r$$

$$(\neg p) \vee q \qquad r$$

$$\neg p \qquad q$$

$$p$$

例 (形式语言公式的构造树)

$$(\neg(p \vee q)) \to r$$

形式语言

例 (形式语言公式的构造树)

$$(\neg(p \vee q)) \to r$$

$$\neg(p \vee q) \qquad r$$

形式语言

例 (形式语言公式的构造树)

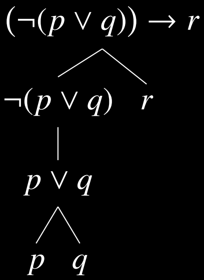
$$(\neg(p \vee q)) \to r$$

$$\neg(p \vee q) \qquad r$$

$$p \vee q$$

形式语言

例 (形式语言公式的构造树)



形式语言

例 (形式语言公式的构造树)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ((\neg p) \vee q) \to r \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
(\neg p) \vee q \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & & r \\
\neg p \arrow[d, no head] & q & \\
p & &
\end{tikzcd}
$$

形式语言

定义 (命题逻辑公式)

- 每个命题逻辑符号（$p, q, r, \ldots$）是一个 公式 （formula）
- 如果 φ 是一个公式，那么 $(\neg\varphi)$ 是一个 公式
- 如果 φ_1 和 φ_2 是公式，那么 $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$、$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$、$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ 以及 $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ 是 公式 。
- 只有以上这些是 公式

形式语言

关于 命题逻辑公式 的定义

- 假如我们把定义中的“φ”、“φ_1”、“φ_2”分别换成“p”、“p_1”、“p_2”，可不可以?
- 元语言与对象语言

形式语言

关于 命题逻辑公式 的定义

- 假如我们把定义中的 “φ”、“φ_1”、“φ_2” 分别换成 “p”、“p_1”、“p_2”，可不可以?
- 元语言与对象语言

形式语言

关于 命题逻辑公式 的定义

- 为什么需要加上“只有以上这些是公式”这句？
- 我们称这种定义为 归纳定义 （inductive definition） 或 递归定义 （recursive definition）

形式语言

关于 命题逻辑公式 的定义

- 为什么需要加上“只有以上这些是公式”这句?
- 我们称这种定义为 归纳定义 （inductive definition）
  或 递归定义 （recursive definition）

例 (归纳定义自然数加法)

假设一台机器只会自然数上的“$+1$”，我们如何“教会”它加法：$n+m=?$

- $n+0=0$
- $n+(m+1)=(n+m)+1$

例 (归纳定义自然数加法)

假设一台机器只会自然数上的“+1”，我们如何“教会”它加法：$n + m =?$

- $n + 0 = 0$
- $n + (m + 1) = (n + m) + 1$

形式语言

括号省略规则

- 整个公式最外侧的括号可以省略
- 否定符号 $\neg$ 有更高的优先级（更强的粘合力?)
- 连续的同样的逻辑符号，约定右侧优先结合

例 (括号省略规则)

- $(\neg p \vee q) \to r$
- $p \vee q \vee r \vee s$
- $p \to q \to r \to s$

再谈自然语言与形式语言

- 早期分析哲学家、逻辑学家：自然语言有系统地误导性，严格科学中应该（原则上）使用形式语言
- 日常语言学派
- 现实：
  - 数学家（包括逻辑学家）实际使用日常语言和大量的符号书写证明
  - 计算机科学开发更接近日常语言的计算机语言

语言的句法

至此为止，我们谈论了

- 符号的使用（有哪些作为变元的命题符号，哪些作为常项的逻辑联词）
- 公式的构造及其规则

这些被归为一个语言的 句法 （syntax）部分，它们与语言的具体意义无关。

例如，$\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的句法地位没有任何区别

命题逻辑的语义

回忆: 在一个具体的命题或推理中，我们根据需要来决定基本命题。确定了基本命题的数量后，很容易算出其真假组合的个数。我们把后者称作一个语义情形（semantic situation）

例

$(\neg p \vee q) \to r$ 中有三个命题变元，表示三个互相独立的基本命题（也作 原子命题 ， atomic formula），它们的语义情形有:

$$\{pqr, pq\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}qr, \bar{p}q\bar{r}, \bar{p}\bar{q}q, \bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$$

命题逻辑的语义

回忆: 在一个具体的命题或推理中，我们根据需要来决定基本命题。确定了基本命题的数量后，很容易算出其真假组合的个数。我们把后者称作一个语义情形（semantic situation）

例

$(\neg p \vee q) \rightarrow r$ 中有三个命题变元，表示三个互相独立的基本命题（也作 原子命题 ， atomic formula)，它们的语义情形有:

$$\{pqr, pq\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}qr, \bar{p}q\bar{r}, \bar{p}\bar{q}q, \bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$$

命题逻辑的语义

我们可以把一个语义情形看作是一个 赋值函数 。例如，$p\bar{q}r$ 可以看作这样一个函数：

- $V_{p\bar{q}r}(p) = T$
- $V_{p\bar{q}r}(q) = F$
- $V_{p\bar{q}r}(r) = T$

命题逻辑的语义

我们可以把一个语义情形看作是一个 **赋值函数** 。例如，$p\bar{q}r$ 可以看作这样一个函数：

- $V_{p\bar{q}r}(p) = 1$
- $V_{p\bar{q}r}(q) = 0$
- $V_{p\bar{q}r}(r) = 1$

命题逻辑的语义

经典命题逻辑语义的基本设定：

- 在任何情形下，一个命题非真即假
  无论它是原子命题还是复合命题（complex formula）
- 一个命题的语义只有真假

命题逻辑的语义

如何表述一个逻辑常项，即逻辑连接词的语义？

- 逻辑连接词的语义：从基本命题的语义（真假）得到复合命题语义（真假）的规则

命题逻辑的语义

真值表 (truth table)

φ	$\neg\varphi$
1	**0**
0	**1**

命题逻辑的语义

真值表 (truth table)

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	**0**	**1**	**1**	**0**
0	0	**0**	**0**	**1**	**1**

练习与讨论

尝试把下面的日常语言语句翻译为命题逻辑公式

1. I will only go to school if I get a cookie now.
2. 马云和我都是教师
3. 马云和我人均亿万富翁
4. A foreign national is entitled to social security if he has legal employment or if he has had such less than three years ago, unless he is currently also employed abroad.

练习与讨论

Consider the following statement

Nothing is too trivial to be ignored.

Given a thing x, what can we draw about x from the above statement? Can you translate it into a propositional logic formula.

练习与讨论

（考虑括号省略规则）下面哪些是命题逻辑公式，哪些不是？

1. $p \to \neg q$
2. $\neg\neg \wedge q \vee p$
3. $p\neg q$
4. $(p \wedge q) \to \neg q$

是公式的话，画出它的构造树。不是的话，为什么？

练习与讨论

能否设计一个计算机程序，判定一个字符串是否是命题逻辑公式?

- 你可以重新定义命题逻辑公式，与我们的定义“精神上一致”就行
- 可以考虑算上或不算括号省略规则